# EUCLIDES

## TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN



15e JAARGANG 1938, Nr. 2.




P. NOORDHOFF — N.V. — GRONINGEN

**Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken** verschijnt in zes tweemaandelijkse afleveringen, samen 18 vel druks. Prijs per jaargang *f* 6.—. Zij, die tevens op het Nieuw Tijdschrift (*f* 6.—) zijn ingetekend, betalen *f* 5.—, voor idem op „Christiaan Huygens" (*f* 10.—) *f* 4.—.

**Artikelen** ter opneming te zenden aan J. H. Schogt, Amsterdam-Zuid, Frans van Mierisstraat 112; Tel. 28341.

**Aan de schrijvers** van artikelen worden op hun verzoek 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt.

**Boeken ter bespreking** en ter aankondiging te zenden aan P. Wijdenes, Amsterdam-Zuid, Jac. Obrechtstraat 88; Tel. 27119.

---

## INHOUD.

51. Hoe groot is het aantal oplossingen van $2x - y = 3$? Voor welk stel is nu $x^2 + y^2$ zo klein mogelijk?
52. Bewijs, dat $17(x^{23} - 1) - 23(x^{17} - 1)$ deelbaar is dóór $(x - 1)^2$.
53. De vergelijkingen $5x^3 - 5ax^2 - 2(3a - 10)x + 24a = 0$ en $x^2 - ax + 4 = 0$ hebben één gemeenschappelijke wortel. Bepaal $a$ en los de vergelijkingen op.
54. Los $x$ op uit: $\sqrt{\{x - \sqrt{(1 - x)}\}} = 1 - \sqrt{x}$.
55. Onder welke voorwaarde is $(x + y + z)^m - x^m - y^m - z^m$ deelbaar door $(x + y)(x + z)(y + z)$?
56. Voor welke waarden van $x$ is

$$-3 < \frac{x^2 - 4x - 6}{x^2 - 5x + 6} < 3?$$

57. De vorm $V \equiv (a + 2)x^4 - (a + 1)x^3 + 2bx^2 + (b + 14)x + 6$ is deelbaar door $(x + 2)$ en geeft bij deling door $(x - 1)$ tot rest $-36$. Bepaal $a$ en $b$. Los daarna op de vergelijking $V = 0$.
58. In een driehoek beschrijft men een rechthoek met twee hoekpunten op de basis en twee hoekpunten op de opstaande zijden. Als de hoogte van de rechthoek $x$ is, voor welke waarde van $x$ is dan de oppervlakte van de rechthoek maximaal?
59. De uiterste waarden van $y = x^2 - (a + 2)x + 2a$ en $y = x^2 + ax + a - 1$ zijn gelijk. Bepaal $a$.
60. Voor welke waarden van $x$ ligt de waarde van de functie $y = 5^{\frac{1}{x^2 - x - 5}}$ tussen 1 en 5?
61. De grafiek van een gebroken lineaire functie heeft $x = -3$ tot asymptoot, snijdt de X-as in $(-3\frac{1}{2}, 0)$ en de Y-as in $(0, 2\frac{1}{3})$. Bepaal de functie en teken de grafiek. Onderzoek of de lijn $x + y = 1$ de grafiek snijdt of raakt.
62. Voor welke reële waarden van $a$ heeft de vergelijking:

$$(a + 4)x^2 + 3(a - 3)x + 3a - 9 = 0$$

1e. één positieve en één negatieve wortel;
2e. twee positieve wortels;
3e. twee negatieve wortels?

63. Bepaal een vergelijking van de 4e graad, die tot wortels heeft de kwadraten en de derde machten van de wortels van $x^2 + 3x + 1 = 0$.

64. Stel in één figuur grafisch voor: $y = (x - 2)(x - 4)$ en $y = \frac{1}{(x-2)(x-4)}$. Bepaal de uiterste waarden van beide functies en de coördinaten van de snijpunten der krommen.

65. Maak een grafiek van de functie $y = 2x$. Oneigenlijke machten.

66. Gegeven de vierkantsvergelijking $x^2 - 4x + 7 = 0$ (wortels $x_1$ en $x_2$). Bepaal een vierkantsvergelijking, die $2x_1^2 + 3x_2^2$ en $3x_1^2 + 2x_2^2$ tot wortels heeft.

67. Schets de grafiek van $y = \frac{1}{x^2 + x + 1}$.

68. Los $x$ en $y$ op uit:

$$\begin{cases} x^2 - 6xy + 9y^2 + 2x - 6y - 15 = 0 \\ xy + x = 12 \end{cases}$$

Geef een grafische toelichting.

69. Bepaal $m$ zodanig, dat de breuk $\frac{x^2 + (m-3)x - 20}{x^3 - mx^2 - x + m}$ vereenvoudigd kan worden.

70. Schets de grafiek van $y = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 6x + 8}$.

71. De functie $y = ax^2 + bx - 42$ bereikt zijn maximum voor $x = -3$ en dit maximum is gelijk aan $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^3 + x^2 - 7x + 2}{x^2 - x - 2}$. Bepaal $a$ en $b$ en maak een grafiek van de functie.

72. Bepaal $m$ zodanig, dat $x^2 - mxy - 6y^2 + (m + 4)\,y - 1$ ontbonden kan worden in 2 factoren van de eerste graad in $x$ en $y$. Welke zijn die factoren?

73. Schets de grafiek van $y = \frac{1}{(x-3)^2}$.

74. Wanneer heeft de grafiek van $y = \frac{x^2 - ax + b}{x - c}$ een verticale asymptoot en wanneer niet? Als deze aanwezig is, wanneer zal dan de grafiek de X-as niet snijden? Hoe verandert $y$ dan van teken? Bevestig algebraisch, dat de kromme dan een maximum en een minimum bezit.

75. Gevraagd een vergelijking van de derde graad, waarvan één wortel 2 is en de andere wortels het drievoud zijn van die van de vergelijking $x^2 - 4x + 10 = 0$.

76. Gegeven de vergelijking $ax^2 - (a - 1)x - (a + 2) = 0$. Als de wortels van deze vergelijking $x_1$ en $x_2$ zijn, bepaal dan $a$ zo, dat

$$\frac{1}{x_1 - a} + \frac{1}{x_2 - a} = 1 \text{ is.}$$

77. Ga het teken na van de breuk $\frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 4x - 5}$ door een grafische voorstelling te maken van teller en noemer afzonderlijk.

78. Bepaal een homogene symmetrische functie van de derde graad, die als factor heeft $2x - y$ en die gelijk wordt aan 1 voor $x = y = 1$.

79. Gegeven de vergelijking $ax^2 - (a - 1)x - (a + 2) = 0$.
*a.* Voor welke waarden van $a$ zijn de wortels reëel?
*b.* Hoe moet men $a$ kiezen om niet alleen te maken, dat de wortels reëel zijn, maar ook, dat zij hetzelfde teken hebben?
*c.* Toon aan, dat in het geval $b$ de beide wortels positief zijn.

80. De vorm $ax^2 + bx + c$ bereikt zijn uiterste waarde voor $x = -1$ en geeft bij deling door $x + 2$ tot rest 9. Verder kan de vorm ontbonden worden in twee gelijke factoren van de eerste graad in $x$. Bepaal $a$, $b$ en $c$.

81. Voor welke waarden van $m$ kan $(m - 2)x^2 - 2(m - 1)x + 3m - 5$ niet nul worden voor reële waarden van $x$?

82. Gegeven de vergelijking: $ax^2 - (a + 1)x - (a - 1) = 0$.
*a.* Bewijs, dat voor alle reële waarden van $a$ de wortels reëel en ongelijk zijn;
*b.* Bepaal $(x_1 - x_2)^2$ ($x_1$ en $x_2$ zijn de wortels van bovenstaande vergelijking) en bewijs, dat het minimum van $(x_1 - x_2)^2$ gelijk is aan 4.

83. De functie $y = \frac{x^2 - 2x + p}{x^2 - 8x + 15}$ heeft 10 als uiterste waarde. Bepaal $p$ en onderzoek de grafiek van de functie.

84. Bewijs, dat $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ deelbaar is door $a + b + c$ en bepaal het quotient zonder de deling uit te voeren.

85. Gegeven de vergelijking: $x^2 - ax + (a - 2) = 0$. Als $x_1$ en $x_2$ de wortels zijn, voor welke waarden van $a$ is dan

$$\frac{1}{x_1 - a} + \frac{1}{x_2 - a} > a - 6?$$

86. Gegeven de functie $y = x^2 - ax + (a - 2)$ ($a$ is een willekeurig reëel getal).

*a.* Bewijs, dat de grafiek van deze functie steeds twee verschillende punten met de X-as gemeen heeft, onverschillig, hoe men $a$ kiest.

*b.* Toon aan, dat de top van de grafiek op zijn minst op een afstand 1 beneden de X-as ligt.

*c.* Teken de grafiek, waarvan de top op deze minimum-afstand 1 beneden de X-as ligt.

87. In welk geval is $ax^2 + bx + c \equiv px^2 + qx + r$?
In welk geval hebben beide leden dezelfde nulpunten?
In welk geval hebben ze één nulpunt gemeen?
Voor welke waarden van $x$ is $ax^2 + bx + c = 0$?
Kan $ax^2 + bx + c \equiv 0$ zijn?

88. De wortels van de vergelijking $x^2 - 2(p+1)x - 67\frac{1}{2}p = 0$ zijn $s$ maal zo groot als die van $x^2 - px - 7\frac{1}{2}p = 0$. Bepaal $s$ en $p$.

89. Los $x$ op uit: $x + 3 + \sqrt{\dfrac{x+3}{x-3}} = \dfrac{20}{x-3}$.

90. Voor welke waarde(n) van $m$ verhouden zich de wortels van de vergelijking $x^2 - (m+1)x + m^2 - 7m + 6 = 0$ als 3 en 2?

91. Gegeven de functie $y = \dfrac{x^2 + ax + b}{x - c}$ ($a$, $b$ en $c$ reële getallen).

*a.* Is het zeker, dat de grafiek van deze functie een verticale asymptoot heeft? Hoe moet men bij gegeven $a$ en $b$ het getal $c$ kiezen om te maken, dat de grafiek geen verticale asymptoot heeft en hoe moet men $c$ kiezen om te maken, dat er wel een verticale asymptoot is?

*b.* Als men $c$ zo gekozen heeft, dat er een verticale asymptoot is, bewijs dan, dat men in de eerste plaats voor $b$ een positief getal moet nemen om te maken, dat de grafiek de X-as niet snijdt; hoe moet men dan nog bij eenmaal gekozen positieve $b$ de $a$ kiezen?

*c.* Pas het vorige toe op $y = \dfrac{x^2 + ax + 1}{x - 1}$ en toon aan, dat de uiterste waarden in teken moeten verschillen en dat hun verschil kleiner dan 8 is.

92. Gegeven de parabool $y = x^2 - 10x + 21$. Men vraagt de vergelijking te bepalen van de parabolen, die de X-as in

$5^n - 5 = 5(5^{n-1} - 1)$ 4voud

**PROSPECTUS**

BEGINSELEN VAN DE

# GETALLENLEER

## DEEL II

VAN DE

THEORIE DER REKENKUNDE

DOOR

P. WIJDENES

AMSTERDAM



Ingenaaid *f* 4.50 Gebonden *f* 5.25
Voor intekenaars op N. T. v. Wisk., Euclides en Chr. Huygens tot 1 Oct. 1937 . . . . *f* 4.00, geb. *f* 4.75

P. NOORDHOFF N.V. - 1937 - GRONINGEN-BATAVIA

**IN DE BOEKHANDEL VERKRIJGBAAR**

**en bij N.V. Uitgevers-Maatschappij NOORDHOFF-KOLFF, Laan Holle 7 Batavia C.**

# VOORBERICHT.

Met het schrijven van dit boek heb ik bedoeld te voorzien in de behoefte, die er bestaat aan een leerboek voor het vak rekenkunde voor de middelbare akte wiskunde; een boek, dat in hoeveelheid en inkleding de stof bevat, die op het examen wordt gevraagd. Hier en daar ben ik iets verder gegaan, dan volgens de verslagen tot heden gevraagd wordt; in het bijzonder wijs ik op de reciprociteitsstelling van Legendre, die in dit werk niet gemist kan worden. Verder meen ik, dat dit boek als inleiding kan dienen voor hen, die colleges in de getallenleer wensen te volgen; voor hen kan het dienen om letterwijs te worden. Mede zijn er velen, die zich uit pure belangstelling tot de rekenkunde voelen aangetrokken; ook deze gebruikers hebben behoefte aan een eenvoudig boek als inleiding.

Waar het terrein voor alle drie klassen van gebruikers bij het begin van de studie vrijwel onbekend gebied is, heb ik mij beijverd de stof zo eenvoudig mogelijk voor te dragen; dikwijls wordt met een getallenvoorbeeld de weg voor een bewijs aangewezen en wel zo, dat het algemene strenge bewijs daarna gemakkelijk te volgen is.

Gaarne betuig ik mijn erkentelijkheid voor de nauwgezetheid, waarmee Dr. Kloosterman de proeven heeft meegelezen en mijn dank aan Dr. Dijksterhuis voor de geschiedkundige aantekeningen van blz. 215/226, die voor het inzicht in de ontwikkeling van de getallenleer van zo groot nut zijn. Mede ben ik veel dank verschuldigd aan mijn medewerkers Herreilers en Harlaar voor het aandeel, dat zij gehad hebben in de bewerking van dit boek.

Amsterdam, Juli 1937. P. WIJDENES.

## HOOFDSTUK I.

### Inleiding.



## HOOFDSTUK II.

### Congruenties.



## HOOFDSTUK III.

### Indices en Kwadraatresten.

## HOOFDSTUK IV.

**Congruenties met deelbare modulus.**





**PROSPECTUS**

# ARCHIMEDES

DOOR

## Dr. E. J. DIJKSTERHUIS

EERSTE DEEL



Summis ingeniis dux et magister fuit.
(Heiberg, Prolegomena. Archimedis Opera Omnia III, xcv)

Prijs . . . . . . . . geb. f 4,50
Voor abonné's op Noordhoff's Wiskundige Tijdschriften, tot 1 Aug. f 3,90

P. NOORDHOFF N.V. = 1938 = GRONINGEN-BATAVIA

**IN DE BOEKHANDEL VERKRIJGBAAR**
**en bij N.V. Uitgevers-Maatschappij NOORDHOFF-KOLFF, Laan Holle 7, Batavia C.**

# VOORREDE.

Dit boek bevat de stof, die ik in de jaren 1931 en 1932 op mijn college over de geschiedenis der wiskunde aan de Gemeente-Universiteit te Amsterdam behandeld heb.

Het werd in 1934 voltooid, maar kon toen niet volgens het oorspronkelijke plan onmiddellijk in Noordhoff's Historische Bibliotheek verschijnen. De redactie van Euclides heeft toen aangeboden, het eerst bij gedeelten in haar tijdschrift op te nemen, waardoor een latere integrale publicatie mogelijk zou zijn. Ik heb dit royale aanbod gaarne aanvaard en stel er prijs op, nogmaals aan de leden dier redactie, de heeren J. H. Schogt en P. Wijdenes, mijn hartelijken dank te betuigen voor den spontanen en krachtigen steun, dien zij mij daardoor hebben verleend. Den heer P. Wijdenes komt mijn erkentelijkheid nog in het bijzonder toe, omdat hij zich de niet geringe moeite heeft willen getroosten, de vele en deels zeer gecompliceerde figuren te teekenen.

Over den inhoud van het boek, waarvan hier het eerste deel verschijnt, kan ik kort zijn: ik heb getracht, het werk van Archimedes, dat een van de hoogtepunten van de mathematische cultuur der Grieksche Oudheid beduidt, nader te brengen tot het begrip en de waardeering van den hedendaagschen lezer. Zulk een poging is reeds tweemaal eerder gedaan en wel op een wijze, welker voortreffelijkheid ik niet kan hopen te evenaren: door T. L. Heath in *The Works of Archimedes* en door P. Ver Eecke in *Les Oeuvres Complètes d'Archimède.* Dat ik gemeend heb, naast deze twee uitmuntende uitgaven een nieuwe bewerking van de geschriften van den grooten Griekschen wiskundige te mogen stellen, vindt zijn rechtvaardiging in de overweging, dat de gekozen methode van behandeling zoowel van de door Heath als van de door Ver Eecke gevolgde principieel verschilt. Heath geeft nl. de redeneeringen van Archimedes weer in moderne notatie, Ver Eecke biedt een letterlijke vertaling van zijn geschriften aan. Beide methoden hebben hare bezwaren: bij het weergeven van Grieksche bewijzen in de symboliek der moderne algebra gaan menigmaal juist de meest typeerende eigenschappen van den klassieken redeneertrant verloren, zoodat de lezer niet voldoende genoodzaakt wordt, zich in den gedachtengang van het origineel te verplaatsen; de letterlijke vertaling daarentegen, die, evenals de Grieksche tekst, alles in woorden zegt, wat wij, door de ontwikkeling der mathematische symboliek verwend, zooveel gemakkelijker in teekenschrift kunnen overzien en begrijpen, helpt den lezer van onzen tijd wellicht te weinig, om de eigenaardige moeilijkheden te overwinnen, die aan de lectuur van de Grieksche mathematische schrijvers nu eenmaal onvermijdelijk vastzitten en die waarlijk niet uitsluitend, ja zelfs niet in de eerste plaats, voortkomen uit het feit, dat zij in het Grieksch schreven.

De in dit boek toegepaste methode tracht van de twee geschetste de voordeelen te vereenigen en de nadeelen te ontgaan. De uiteenzetting volgt den Griekschen tekst op den voet; echter worden alleen de proposities letterlijk vertaald; daarna worden de bewijzen weergegeven in een speciaal voor dit doel geconstrueerd teekenschrift, dat het mogelijk maakt, de gehouden redeneering stap voor stap te volgen. Dit teekenschrift, dat ook reeds werd toegepast in mijn werk *De Elementen van Euclides* (Groningen, 1929, 1931) heeft zich in langjarig gebruik een goed hulpmiddel voor de uiteenzetting van Grieksche mathematische redeneeringen betoond.

Behalve door toepassing van dit hulpmiddel heb ik getracht, aan de bezwaren, die een hedendaagsch wiskundige blijkens ervaring bij lectuur van Grieksche schrijvers ondervindt, nog op een andere wijze tegemoet te komen. De Grieksche wiskundigen geven namelijk in hun werken veelal zonder een woord van toelichting over het nagestreefde doel een dor aandoende aaneenrijging van proposities en bewijzen, waarin tusschen hulp- en hoofdstellingen niet het minste onderscheid wordt gemaakt en waarin de groote lijnen van het betoog vaak heel moeilijk te ontdekken zijn. Om die lijnen beter te doen uitkomen, heb ik alle stellingen, die ten opzichte van de eigenlijke kern van een werk de beteekenis van elementen (*στοιχεῖα*) hebben, in een afzonderlijk hoofdstuk (III) vereenigd; bij ieder afzonderlijk werk kon nu het betoog zeer veel korter worden samengevat, doordat alle hulpstellingen reeds vooraf behandeld waren. Een decimale indeeling van Hoofdstuk III maakt het mogelijk, om ze hier desgewenscht snel terug te vinden en na te gaan, hoe ze bewezen kunnen worden. Door deze rangschikking werd tevens bereikt, dat ieder geschrift van Archimedes nu afzonderlijk kan worden bestudeerd. Uit den aard der zaak neemt het Elementenhoofdstuk in het thans verschijnende eerste deel een onevenredig groote plaats in; deze zal eerst bij beschouwing van het in twee deelen voltooide werk tot haar ware proporties worden teruggebracht.

Het tweede deel zal met een uitvoerig register worden besloten.

E. J. DIJKSTERHUIS.

## INHOUD VAN HET EERSTE DEEL.

Een gegeven lijnstuk $AB$ in $E$ zoo te verdeelen, dat, als de betrekkingen

$$(ZA, AE) = (AK, BE)$$
$$(HB, BE) = (BM, AE) \qquad \text{met } AK = BM$$

gelden, $E$ voldoet aan de voorwaarde

$$(ZE, HE) = (\Gamma, \Delta)$$

waarin $\Gamma$ en $\Delta$ gegeven lijnstukken zijn.

Dit vraagstuk wordt nu als volgt geanalyseerd:

Laat $ME$ verlengd het verlengde van $KA$ in $\Theta$ snijden; evenzoo $KE$ verlengd het verlengde van $MB$ in $\Lambda$, dan bewijst men zonder moeite

$$ZA = \Theta A \text{ en } HB = \Lambda B.$$

Nu is

$$(AE, BE) = (\Theta A, MB) = (KA, \Lambda B) = (\Theta A + AE, MB + BE) =$$
$$= (KA + AE, \Lambda B + BE)$$

dus $\quad \mathbf{O}\,(\Theta A + AE, \Lambda B + BE) = \mathbf{O}\,(KA + AE, MB + BE)$

of, als $B\Sigma = BM, AP = AK,$

$$\mathbf{O}\,(ZE, HE) = \mathbf{O}\,(PE, \Sigma E).$$

Hieruit volgt

$$(\Gamma, \Delta) = (ZE, HE) = [\mathbf{O}(ZE, HE), \mathbf{T}\,(HE)] = [\mathbf{O}\,(PE, \Sigma E), \mathbf{T}\,(HE)].$$

Maak nu $EO = EB$ en loodrecht op $AB$, $\Sigma T$ loodrecht op $AB$ met $T$ op het verlengde van $OB$. Uit de gelijkvormigheid van de driehoeken $EOB$ en $\Sigma TB$ volgt nu

$(TB, OB) = (\Sigma B, EB)$ dus *componendo* $(TO, OB) = (\Sigma E, EB)$.

Snijdt de loodlijn op $BA$ door $P$ het verlengde van $BO$ in $Y$ dan is ook

$$(BO, OY) = (BE, EP)$$

waaruit *ex aequali*

$$(TO, OY) = (\Sigma E, EP)$$

Dus is

$$[\mathbf{O}\,(TO, OY), \mathbf{T}\,(OY)] = [\mathbf{O}\,(\Sigma E, EP), \mathbf{T}\,(EP)]$$

of

$$[\mathbf{O}\,(TO, OY), \mathbf{O}\,(\Sigma E, EP)] = [\mathbf{T}\,(OY), \mathbf{T}\,(EP)] = 2:1.$$

Dus is

$$\mathbf{O}\,(TO, OY) = 2\mathbf{O}\,(\Sigma E, EP).$$

dezelfde punten snijden als de gegeven kromme, terwijl hun uiterste waarde, absoluut genomen, het dubbele is.

93. Voor welke waarden van $x$ is

$$\frac{2x - 5}{x - 1} > 3?$$

94. Gegeven de vergelijking:

$$x^3 - ax^2 - bx + (b + 1) = 0.$$

Bepaal $a$ en $b$ zo, dat een der wortels van deze vergelijking gelijk aan $-1$ is en dat de som van de kwadraten van de andere twee wortels 5 is.

95. Bepaal $a$, $b$ en $c$ zodanig, dat de vorm:

$$(a + b)\, x^2 + (2a + b)\, xy + cy^2 - x + 13y - 15$$

deelbaar is door $2x - y + 5$.

96. De grafiek van de functie $y = ax^2 + bx + c$ snijdt de X-as in A $(-4,0)$ en B $(+2,0)$ en de Y-as in C $(0,-8)$. Bepaal $a$, $b$ en $c$ en schets de grafiek. Daarna ook die van:

$$y = \frac{1}{ax^2 + bx + c}.$$

97. Los $x$ op uit:

$$\frac{ax - 1}{a - x} = \frac{2}{x - 1}.$$

98. Bewijs, dat elke macht van 5, verminderd met 5, deelbaar is door 20.

99. De functies $y = x^3 + 3x^2 - 3x + 4$ en $y' = x^3 + x^2 - 22x - 40$ hebben een zelfde nulpunt. Schets de grafieken.

100. Los $x$ op uit:

$$a(x^2 - ax + 1) = (a - x)\,(a + x) + x.$$

101. Waar liggen de punten P $(x, y)$, waarvoor

$$(x + 2y - 3)\,(2x - y + 5) \gtrless 0 \text{ is?}$$

102. Splits $\dfrac{x^2 - x + 1}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}$ in enkelvoudige breuken.

103. Ga na voor welke waarden van $a$

$$\sqrt{a + \sqrt{a^2 - 2 - a}} \text{ en } \sqrt{a - \sqrt{a^2 - a - 2}}$$

beide reëel zijn.

104. De vormen $x^2 - (a + 2)x + 2a + 4$ en $x^2 - 4ax + 8a + 4$ hebben een even groot minimum. Bepaal $a$. Breng daarna de functies in tekening.

105. De vergelijking $x^2 + px + q = 0$ gaat over in een zuivere vierkantsvergelijking, als men de wortels met 3 vermeerdert en in een onvolledige, als men ze met 3 vermindert. Bepaal $p$ en $q$.

106. Herleid $\sqrt[3]{a} \times \sqrt[5]{a}$ en bewijs de gebruikte stellingen. Is de herleiding via $a^{1/3} \times a^{1/5}$ een bewijs?

107. De vergelijkingen $x^2 + (a - 1)x + b - 1 = 0$ en $2x^2 + (3a - 2b)x + 4(a - b) = 0$ hebben dezelfde wortels. Bepaal $a$ en $b$.

108. Voor welke waarden van $m$ heeft de vergelijking $mx^2 - 4(m + 5)x + m + 3 = 0$ reële wortels? Voor welke waarden van $m$ heeft deze vergelijking wortels, die verschillend teken hebben?

109. Voor welke waarde van $a$ is de breuk $\dfrac{x^2 + 2x - 3a}{2x^2 - x - a}$ te vereenvoudigen?

110. Schets de grafiek van $y = \dfrac{x - 1}{x + 1}$ en daarna die van $y = 2^{\frac{x-1}{x+1}}$.

111. Als men de wortels van $3x^2 - mx + 1 = 0$ beide met 3 vermeerdert, wordt de ene gelijk aan driemaal de andere. Bepaal $m$.

112. Als de lijn, voorgesteld door $y = mx$, moet raken aan de kromme, voorgesteld door $y = x^2 - 3x + 4$, bepaal dan de waarde van $m$.

113. De functie $y = \dfrac{ax^2}{x^2 - 4}$ wordt grafisch voorgesteld door een kromme, die de lijn $y = 2$ tot horizontale asymptoot heeft. Bepaal $a$ en teken de grafiek.

114. De vergelijking $5x - 2 = 2(x + 3) + 3(x - 1)$ is vals; kwadrateer de beide leden. De dan ontstaande vergelijking is niet vals. Verklaar, hoe dit mogelijk is.

115. Voor welke gehele waarden van $x$ is

$$3x^2 + 4x < 84 \text{ en tevens } x^2 - 17x < 84?$$

116. De vorm $V \equiv x^5 + ax^4 + 5(a - b)x^3 - (a + 3b)x^2 +$

$+ bx + 12$ is deelbaar door $x^2 - x - 2$. Bepaal $a$ en $b$. Los daarna de vergelijking $V = 0$ op.

117. Men vraagt het maximum of minimum van de functie: $y = x^2 + 4ax + 3a^2 - 6a + 1$. Stel de uiterste waarde van de functie $p$. Welke waarden mag $p$ hebben, opdat $a$ reëel zij?

118. Bepaal $a$ zodanig, dat de grafiek van $y = \dfrac{x^2 - 4x + a}{x(x - 4)}$ de X-as raakt. Na substitutie van de gevonden waarde van $a$ de grafiek te tekenen.

119. De functie $y = \dfrac{x + a}{(x - 1)^2}$ heeft tot minimum $-\frac{1}{8}$. Bepaal $a$ en schets de grafiek.

120. Schets de grafiek van:

$$y = \frac{(x + 5)(x - 3)}{x - 4} \equiv x + 6 + \frac{9}{x - 4}.$$

121. Bepaal het teken van $4x^3 - 10x^2 - 6x$ voor verschillende waarden van $x$.

122. Waar liggen in het XOY-vlak de punten $(x, y)$, waarvoor $z^2 - 3z + (3x + 2y) = 0$ reële wortels heeft? En waar de punten, zodat $z^2 - (2x - y + 1)z - (2x - y + 1)$ voor alle waarden van $z$ positief is?

123. De vorm $2x^5 - ax^4 + bx^2 - 7$ geeft bij deling door $(x - 1)$ tot rest 2 en bij deling door $(x - 2)$ tot rest 61. Bepaal $a$ en $b$ en vervolgens de rest bij deling door $(x - 2)(x + 1)(x - 1)$ zonder de deling uit te voeren.

124. Bepaal $a$ zo, dat $\dfrac{x^2 - 5x + 2}{2x^2 - 5x + a}$ alle reële waarden kan aannemen.

125. De grafiek van de functie

$$y = \frac{ax^2 + (b - 1)x - 6}{x^2 + (a + 3)x - (2b + 1)}$$

snijdt de X-as in A $(+2,0)$ en heeft voor $x = -5$ een verticale asymptoot. Bepaal $a$ en $b$ en schets de grafiek.

---

## INGEKOMEN BOEKEN.

Van P. NOORDHOFF, Groningen.

P. WIJDENES, *Algebraische Vraagstukken II* **8e druk,** 121 blz. ing. *f* 1.60 . . . . . . . . . . . geb. *f* 1.85
Antwoorden *f* 1.50, gratis voor docenten, die de boeken gebruiken.
*Algebraische Vraagstukken III* **8e druk,** 109 blz. ing. *f* 1.50
geb. *f* 1.75
Antwoorden *f* 0.75.

P. WIJDENES, *Algebra voor Middelbare handelsscholen,* deel I — **7de druk,** . . . . . . . . . . . . . . . . geb. *f* 1.50

NOORDHOFF's *Tafel in vier decimalen,* **11de—15de** duizendtal geb. *f* 1.—

Dr H. J. E. BETH en Dr P. J. VAN LOO, *Mechanica voor het middelbaar onderwijs,* **3de druk,** . . . . . . . . . geb. *f* 2.50

Prof. Dr J. A. SCHOUTEN en Prof. Dr D. J. STRUIK, *Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie,* **2 e** volständig umgearbeite Auflage *f* 12.50. XII en 300 blz. 22 blz. Literaturverzeichnis (von 1827 bis 1937); 16 blz. index.

C. J. ALDERS, *Stereometrie voor M.O. en V.H.O.,* 120 blz. 99 fig. gec. *f* 1.50

Dr H. C. SCHAMHARDT, *Mondelinge Staatsexamens A, 1938;* overdruk uit Euclides Jg. XV, afl. 1, 2.
100 vragen over Vlakke meetkunde en Stereometrie;
125 vragen over Algebra; 25 blz. *f* 0.80

Dr N. QUINT, *Natuurkundige vraagstukken,* **7de druk,** bezorgd door Dr P. A. van der Harst, 1535 vraagstukken over Beweging en evenwicht — Vloeistoffen — Gassen — Warmte — Trillende beweging en geluid — Licht — Magnetisme — Electrostatica — Electrische stromen — verder nog XIV tabellen, 243 blz *f* 2.50
geb. *f* 3.—

Dr A. D. NATHANS en Dr H. LINDEMAN, *Leerboek der Natuurkunde,* deel II, 214 blz. 160 fig. *f* 2.90, geb. . . . . *f* 3.25

P. WIJDENES en Dr D. DE LANGE, *Rekenboek voor de H.B.S. I,* **17de onveranderde druk,** geheel conform het leerplan 1937, 131 blz., 16 fig., gec. . . . . . . . . . . . . . . . *f* 1,70

P. WIJDENES en Dr H. J E. BETH, *Nieuwe Schoolalgebra I,* **10de onveranderde druk,** 156 blz., 21 fig., geb. . . . . . . *f* 2.25
*Nieuwe Schoolalgebra II,* **9de onveranderde druk,** 204 blz., 50 fig., geb. . . . . . . . . . . . . . . . . . . *f* 2.25

Dr D. J. E. SCHREK, *Beginselen van de Analytische meetkunde,* **5de druk,** 195 blz., 53 fig., *f* 2.75, geb. . . . . . . *f* 3.25

---

## ERRATA.

Blz. 38, 39 en 40 zijn door een of andere vergissing afgedrukt, alvorens enkele drukfouten verbeterd waren. Men gelieve te verbeteren:

Blz. 38 regel 1; *van 4* moet zijn *aan.*
„ 12; *opdat* moet zijn *of dat* en *op* is *of.*
„ 15; *roose* moet zijn *rooie.*
„ 4 v. o.; tweemaal *op* in plaats van *of.*
Blz. 39 „ 2 v. o. *het* moet zijn *een.*
Blz. 40 noot; achter *verdient* inlassen: *dan wel een andere.*

---

## KORRELS.

### XXVIII. DE CIRKELGANG.

„Wat is dat nou? Leert U ze nog van dal en dag?”

De onderwijzer: „Ja, m'neer, we moeten wel; kijkt U maar in de Toetsnaald, zelfs die van dit jaar; er zijn opgaven voor toelatingsexamens (H.B.S., Gymnasium, Lyceum, lezer), waarin dal en dag nog voorkomen; wat moeten wij doen? De kinderen er op africhten.”

In Jg. VI 1929/30 van Euclides vindt men een artikel over het metrieke stelsel, twee normaalbladen, het adres aan den Minister van Onderwijs en het antwoord daarop; dit luidde in het kort: „gebruik bij alle onderwijs slechts de maten en gewichten van de normaalbladen en gebruik de schrijfwijze van de normaalbladen.”

Aan het laatste wordt algemeen voldaan; er zijn er echter, die blijkbaar niet kunnen nalaten een paar maten, die afgedaan hebben, weer leven in te blazen nl. dag en dal. Dat ze in een uitgebreider stelsel nog voorkomen, doet niets ter zake; daarin vindt men ook mega, hektokilo, myria, decimilli, centimilli, mikro, millimikro. Het leven, dus de school zeker, heeft genoeg aan wat de normaalbladen geven en daarop vindt men niet dag en dal.

En als enkele toelatingsvraagstukjes ze nog steeds opnemen, moet de lagere school ze leren en als de leraar ze ziet in boekjes voor opleidingsscholen, kan hij ze opgeven! Ik zag enige tijd geleden in een sommenboekje dam$^3$, zelfs das; in een Toetsnaald van een paar jaar terug st. Zo komen we nooit uit de rommel.

Laten *allen,* zowel bij het L.O. als het M.O., zich houden aan de missive van den Minister en *slechts* gebruiken de maten en gewichten van onderstaand lijstje.

| Lengtematen. | | Gewichten. | | Inhoudsmaten. | |
|---|---|---|---|---|---|
| kilometer . . . | km | kilogram . . . | kg | | |
| hektometer . . | hm | hektogram . . | hg | hektoliter . . . | hl |
| dekameter . . | dam | | | | |
| **meter** . . . . | m | **gram** . . . . | g | **liter** . . . . . | l |
| decimeter . . | dm | decigram . . . | dg | deciliter . . . . | dl |
| centimeter . . | cm | centigram . . . | cg | centiliter . . . . | cl |
| millimeter . . | mm | milligram . . . | mg | | |

| Vlaktematen. | Inhoudsmaten. | |
|---|---|---|
| $km^2$ | | quintaal . q = 100 kg |
| $hm^2$ = ha = hektare | | ton . . . t = 1000 kg |
| $dam^2$ = a = are | | Men mag ook schrijven □ meter en kub. meter; dan de naam voluit. |
| $m^2$ = ca = centiare | $m^3$ = 10 hl | |
| $dm^2$ | $dm^3$ = 1 liter | |
| $cm^2$ | $cm^3$ | |
| $mm^2$ | $mm^3$ | |

---

## XXIX. VOLGORDE VAN DE BEWERKINGEN.

Men kan in verschillende boeken er hele beschouwingen over lezen; ik heb er me ook wel aan bezondigd, veel te veel. Sinds een jaar doe ik het anders; ook spreek ik niet meer over „volgorde der bewerkingen", al of niet met allerlei ezelsbruggetjes. Het heet nu: *samengestelde vormen;* dat ik me daarbij de grootste beperking opleg, is duidelijk. Bij de betere manier, die ik er op heb gevonden, geeft een grote vorm echter niet de minste last; 't gaat nu zo:

*a.* $15 \times 2 \times 3^3 + 7 \times 6 \times 2 : 3 - 5^2 \times 3 : 2^2 : 5$
$- 4 \times 10 : 5 \times 5 + 2^3 : 5 : 4$

Vervang de machten opv. door 27; 25; 4 en 8.

Maak de plus- en mintekens flink dik (op het bord overtrekken met rood krijt, is ook heel duidelijk).

De vorm wordt dan:

$$15 \times 2 \times 8 \mathbf{+} 7 \times 6 \times 2 : 3 \mathbf{-} 25 \times 3 : 4 : 5$$
$$\mathbf{-} 4 \times 10 : 5 \times 5 \mathbf{+} 8 : 5 : 4$$

We hebben de vorm goed kenbaar als een veelterm geschreven. Elke term bevat nu geen andere tekens dan $\times$ en **:**

Vertoont een term enkel gelijke tekens, b.v. $5 \times 6 \times 9 \times 3$ en $120 : 3 : 4 : 5$, dan deze uitrekenen van links naar rechts; zijn er verschillende tekens, zoals in $12 \times 3 : 5 \times 7$; $12 : 3 \times 5 : 7$; $12 : 3 : 5 \times 7$; $12 \times 3 \times 5 : 7$, maak dan de $\times$-tekens weg; deze voorbeelden worden dus $36 : 35$; $12 : 15 : 7$; $12 : 3 : 35$; $180 : 7$.

De vorm *a* wordt dus

*b.* $240 \mathbf{+} 28 \mathbf{-} 3\frac{3}{4} \mathbf{-} 1\frac{3}{5} \mathbf{+} \frac{2}{5}$; de optellingen en aftrekkingen worden van links naar rechts uitgevoerd.

De grote vereenvoudiging, die alle twijfel opheft, ligt hierin, dat men de vorm eerst duidelijk als een veelterm voorstelt; de rest komt vanzelf wel.

W.

# HET AFBEELDEN IN DE WISKUNDE [1])

DOOR

Dr G. H. A. GROSHEIDE F.Wzn.

Wanneer men wenscht over te gaan tot de vervaardiging van een land- of zeekaart, staan verschillende methoden ter beschikking. Of men nu in verband met het doel, waartoe de kaart wordt gemaakt, zijn keus laat vallen op de stereografische projectie, dan wel op de mercatorprojectie of een andere projectie — steeds is het resultaat, dat met elke plaats van een zeker gedeelte der aardoppervlakte één bepaald punt van de kaart correspondeert. Meer wiskundig kan dit laatste aldus geformuleerd worden, dat men een afbeelding tot stand brengt van een gedeelte van een boloppervlak op een gedeelte van een plat vlak.

Overziet men de verschillende gedeelten niet alleen der toegepaste, maar ook der zuivere wiskunde, dan blijkt, dat daarin schier overal afbeeldingen optreden. Enkele daarvan willen wij thans wat nader bezien, eenerzijds om eenig inzicht te verkrijgen in het karakter van het afbeelden, anderzijds om vast te stellen, welke vruchten de toepassing van het afbeeldingsbeginsel afwerpt.

Wij staan terwille van de duidelijkheid nog verder bij het gekozen voorbeeld stil en vinden als wezenlijk element daarin niet, dat aan een punt op aarde een punt van de kaart wordt toegevoegd, doch dat een regel bestaat volgens welken zulks kan geschieden. Moet de toevoeging werkelijk volledig worden uitgevoerd, dan komt het werk slechts klaar, indien de kaart niet anders dan een eindig aantal punten, bijvoorbeeld alle steden met meer dan 10.000 inwoners behoeft te bevatten. Het voornaamste is het *voorschrift,* dat in staat stelt bij elk punt het beeldpunt te construeeren.

Zijn in de elementaire meetkunde twee gelijkstandige gelijkvormige driehoeken gegeven, dan kunnen wij als beeld van een

---

[1]) Openbare les gehouden bij de aanvaarding van het lectoraat in de Wiskunde en de elementaire Sterrenkunde aan de Vrije Universiteit te Amsterdam op Vrijdag 14 October 1938.

punt van den eenen driehoek beschouwen het punt van den anderen, dat te verkrijgen is door de verbindingslijn van het oorspronkelijke punt en het gelijkvormigheidscentrum te snijden met de overeenkomstige zijde in den tweeden driehoek. De toegepaste regel is hierbij zuiver meetkundig, hetgeen lang niet algemeen het geval is.

In de cartographie begint men meestal met aan een punt op aarde lengte en breedte of andere coördinaten toe te kennen, om vervolgens op het teekenpapier eveneens een coördinatenstelsel in te voeren. Daarna kan men — zooals gewoonlijk wordt gezegd — de afbeeldingswet eenvoudig uitdrukken met behulp van een aantal betrekkingen tusschen de coördinaten in beide stelsels.

Zonder beantwoord te hebben de met elkaar verband houdende vragen of dit spraakgebruik verklaarbaar is en of de oorspronkelijke afbeelding feitelijk niet door een andere is vervangen, kunnen wij reeds zeggen, dat de laatste uitspraak niet geheel volledig is, daar wij nauwkeurig bezien niet met één doch met drie afbeeldingen te doen hebben. Immers invoeren van coördinaten op den bol en in het platte vlak is aan elk punt daarvan een geordend paar van getallen toevoegen en dit wordt in de wiskundige taal ook afbeelden genoemd. Zulks is alleen mogelijk, doordat het begrip afbeelden een zóó ruime beteekenis heeft verkregen, dat een wezenlijke eigenschap van alle afbeeldingen in fotografie en schilderkunst en trouwens ook van alle projecties in de beschrijvende meetkunde nl. dat het beeld van een punt weer een punt is, verloren is gegaan.

Ter voorkoming van misverstand, merken wij op, dat deze verruiming van beteekenis volkomen los staat van de verarithmetiseering der meetkunde. Zoo hebben wij in de *cyclographie* een afbeelding van de punten der ruimte op de georienteerde cirkels van een plat vlak. Men voegt daarbij aan een willekeurig punt P der ruimte den cirkel van het vlak V toe, die als middelpunt heeft het voetpunt van de loodlijn uit P op V en als straal den afstand van P tot V en denkt zich dezen cirkel in positieven of negatieven zin doorloopen, al naar gelang het punt P zich aan de eene of aan de andere zijde van het vlak V bevindt.

Na het voorgaande is het duidelijk, dat de mogelijkheid van afbeelden volkomen onafhankelijk is van den aard der dingen, die afgebeeld worden. Daartoe is slechts van belang, dat zij

bestaan en tezamen op een of andere wijze een grooter geheel vormen. En hetzelfde geldt voor de wiskundige objecten, die als beelden optreden. Wij zijn dus beide malen gerechtigd om geheel abstract te spreken van een verzameling van elementen en definieeren afbeelden als het toevoegen van de elementen van een tweede aan die van een eerste verzameling.

Op grond van de gegeven voorbeelden meent men misschien, dat in de definitie van afbeelden iets moet worden opgenomen omtrent de wijze, waarop de elementen aan elkaar worden toegevoegd. Met een punt op aarde correspondeerde één punt der kaart en omgekeerd was een punt van de kaart beeld van slechts één plaats op aarde. Zoo was eveneens bij de andere afbeeldingen aan één element der éëne verzameling één en niet meer dan één element der andere toegevoegd. Nu stellen inderdaad sommigen in hun omschrijving van een afbeelding aan de toevoeging den eisch, dat zij deze eigenschap, die men omkeerbare eenduidigheid of eeneenduidigheid noemt, moet bezitten. Hiermede wordt dan de naam afbeelding alleen toegekend aan een deel der correspondenties, want deze zijn niet alle omkeerbaar eenduidig. Voegt men aan elk punt van een cirkel de middellijn toe, die er door gaat, dan verkrijgt men een afbeelding van de punten van den cirkelomtrek op de koorden door het middelpunt, die wel eenduidig, maar niet omkeerbaar eenduidig is, daar elke middellijn bij twee punten van den cirkelomtrek behoort.

Met de vaststelling van het feit, dat afbeelden, hetzij met toevoegen, hetzij met eeneenduidig toevoegen identiek is, verdwijnt de verwondering over de veelvuldige toepasbaarheid ervan. Immers ook het moderne begrip van een functie dekt geheel dat van een toevoeging. Het voorschrijven van een regel volgens welken aan elk reëel getal een ander reëel getal wordt toegevoegd, dat wil zeggen volgens welken de verzameling der reëele getallen op zichzelf of op een harer deelverzamelingen wordt afgebeeld, is geheel hetzelfde als het definieeren van een reëele functie voor alle reëele waarden van één veranderlijke. Op overeenkomstige wijze zijn meerwaardige functies, analytische functies van een complexe veranderlijke en functies van een aftelbaar oneindig of eindig aantal veranderlijken te beschouwen als voorschriften voor afbeeldingen van verzamelingen.

Ten besluite van ons onderzoek naar het karakter van het

afbeelden zij nog vermeld de uitspraak, dat een functioneele betrekking wordt opgebouwd door elementenparen. Natuurlijk is een werkelijke paarvorming weer alleen volledig uitvoerbaar, indien men te doen heeft met twee eindige verzamelingen. Wij ontdekken hier den abstracten achtergrond van hetgeen gebeurt, wanneer bij de punten eener graphische voorstelling tusschen haken wordt aangegeven, welke coördinaten zij bezitten of wanneer bij een meetkundige afbeelding twee correspondeerende punten een zelfde hoofdletter dragen eenmaal zonder en eenmaal met accent.

In de tweede plaats geven wij een overzicht van de verschillende afbeeldingen, door een indeeling daarvan te maken op grond van het aantal elementen van de tweede verzameling, dat in het algemeen aan een willekeurig element van de eerste wordt toegevoegd. Wij mogen niet verder gaan dan spreken van „in het algemeen", want bij vele afbeeldingen komen *singuliere elementen* voor, dat zijn elementen van de eerste verzameling, waarmede hetzij geen, hetzij oneindig veel elementen van de tweede correspondeeren. Het aantal, dat dus als kriterium voor een eerste hoofdindeeling werd gekozen, kan om te beginnen oneindig groot zijn. Wanneer in een plat vlak aan een punt worden toegevoegd alle punten, die daarmede poolverwant zijn ten opzichte van een vaste kegelsnede, vormen de beelden een geheele rechte lijn, de zoogenaamde poollijn. De afbeeldingen dezer klasse, waartoe men ook de cyclometrische functies moet rekenen, blijven verder buiten beschouwing.

Gezamenlijk kunnen worden besproken de afbeeldingen, waarbij met een zeker element der eerste verzameling een weliswaar eindig, doch van één verschillend aantal elementen der tweede correspondeert. In de functietheorie zijn deze vertegenwoordigd in de meerwaardige functies, waarvan $\sqrt{x}$ een voorbeeld is, omdat bij één waarde van $x$ twee waarden van den wortel nl. een positieve en een negatieve behooren. Ook spelen deze afbeeldingen een voorname rol in de meetkunde van het aantal. Daarin toch wordt veelvuldig gebruik gemaakt van een correspondentiebeginsel, dat in zijn eenvoudigsten vorm aldus luidt: Indien twee veranderlijke punten A en B van een rechte algebraisch zóó met elkander verbonden zijn, dat bij ieder punt A $m$ punten B en bij ieder punt B $n$ punten A behooren, liggen op de rechte $m + n$ punten, waarin een punt A met een correspondeerend punt B samenvalt.

Met deze weinige opmerkingen omtrent de algemeene $[m, n]$-verwantschap volstaan wij, om verder uitsluitend te spreken over afbeeldingen van het eenig overgebleven type, te weten de eenduidige. Deze beperking is niet willekeurig, doch steunt op een speciale eigenschap der eenduidige afbeeldingen. Wanneer een verzameling wordt afgebeeld op een tweede en vervolgens deze tweede op een derde, is met een omweg ook een afbeelding tot stand gebracht van de eerste op de derde verzameling. Deze laatste afbeelding is in het algemeen van een ander type dan de beide oorspronkelijke, waarvan zij het *product* wordt genoemd. Slechts indien eerste en tweede afbeelding beide eenduidig zijn, is dit met hun product ook het geval.

Een verder overzicht der eenduidige afbeeldingen is te verkrijgen door te letten op de omgekeerde afbeelding, dat is de afbeelding van de tweede verzameling op de eerste, die ontstaat door aan elk element der tweede verzameling die elementen van de eerste toe te voegen, waarvan het het beeldelement is bij de oorspronkelijke afbeelding. Immers is terstond duidelijk, dat onder de eenduidige afbeeldingen weer een speciale plaats zal worden ingenomen door de exemplaren, waarvan het omgekeerde ook eenduidig is en die dus zelf omkeerbaar eenduidig zijn (eventueel met singuliere elementen). Behalve een eerste onderverdeeling van de eenduidige afbeeldingen in omkeerbaar eenduidige en niet omkeerbaar eenduidige is echter nog een tweede onderverdeeling gemotiveerd en wel een op grond van het al dan niet continu zijn.

In het vervolg wordt bij een eeneenduidige afbeelding zonder meer steeds ondersteld, dat de afbeelding evenmin als haar omgekeerde singuliere elementen bezit. Alle verzamelingen, die aldus op een gegeven verzameling zijn af te beelden, kunnen ook op elkaar omkeerbaar eenduidig worden afgebeeld en vormen een verzameling, die door elk harer elementen volkomen is bepaald. Deze laatste bevat niet alle verzamelingen, want bij twee willekeurige is men in het algemeen niet in staat een eeneenduidige correspondentie tusschen de elementen te construeeren. Wij noemen daarom twee verzamelingen, die omkeerbaar eenduidig op elkaar zijn af te beelden gelijkmachtig of aequivalent en zeggen ook wel, dat zij eenzelfde machtigheid of cardinaalgetal bezitten.

Het schijnt gewenscht er de aandacht op te vestigen, dat het steeds gaat over de mogelijkheid twee verzamelingen eeneenduidig

# Wenken voor Wiskunde L.O.

Het programma voor het examen Wiskunde L. O. (vak *p* van art. 2 der Wet op het L. O. van 1878) is vastgesteld bij Koninklijk Besluit van 17 Dec. 1890 (No. 181) en luidt als volgt:

*a.* *Kennis van de vlakke meetkunde, de vlakke driehoeksmeting en de stereometrie.*
*b.* *Kennis van de lagere algebra tot en met de vierkantsvergelijkingen, alsmede van de reken- en meetkundige reeksen en de logarithmen.*
*c.* *Vaardigheid in het oplossen van eenvoudige stel- en meetkundige vraagstukken.*

Zoals men ziet, een programma, dat, zoals de meeste examenprogramma's vrij vaag is; hieruit is niet op te maken, wat men alzo dient te weten. Het karakter van dit examen is dan ook in de ongeveer vijftig jaar, dat het programma van kracht is, heel wat gewijzigd. Het heeft daarom ongetwijfeld zijn nut zowel de schriftelijke als de mondelinge examenopgaven der laatste jaren te bestuderen. Een betrouwbare leidraad daarbij is:

**H. G. A. VERKAART,**
**Gids voor het Examen Wiskunde L.O.,**
**4e druk,**

met de **schriftelijke opgaven** Nederland 1930—1937, Oost-Indië 1926—1937, West-Indië 1925—1936 met de antwoorden, terwijl door supplementen elk jaar de serie wordt aangevuld met de nieuwste opgaven; bovendien vindt men er ongeveer **1000 vragen van mondelinge examens in.** De oplossingen vindt men in het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde.

Een vraag, die nog al eens door studerenden gedaan wordt, is: „Hoe lang duurt de studie voor deze akte?" Dat is niet algemeen te zeggen en hangt, behalve van de vermogens van den studerende, grotendeels van de vroegere opleiding of studie af. Iemand, die het einddiploma H.B.S. 5-j. c. heeft, zal in 't algemeen binnen het jaar klaar kunnen zijn, dus als hij in 't volgende voorjaar de onderwijzersakte haalt, in 't zelfde jaar ook wel voor de akte Wiskunde op kunnen gaan. Iemand, die aan een kweekschool

opgeleid is, of met einddiploma H. B. S. 3-j., zal er een jaar langer over doen. Wie zijn opleiding aan een normaalschool heeft ontvangen, zal flink moeten aanpakken om *na twee* jaar klaar te kunnen zijn.

We laten enige wenken bij de studie volgen:

## Algebra.

Hier vormen de algemene theorie der vergelijkingen, die van de drieterm $ax^2 + bx + c$ en de vierkantsvergelijking, logarithmen, reeksen, het functiebegrip en uiterste waarden de hoofdschotel; vooral de theorie over gelijkwaardige vergelijkingen moet serieus worden bestudeerd; in het bijzonder denke men aan de irrationale vergelijkingen. Bij de theorie der vergelijkingen moet het invoeren of verdrijven van wortels bij vermenigvuldiging, deling, machtsverheffing en worteltrekking goed bestudeerd worden. De eigenschappen van de drieterm met de daaraan vastzittende elementaire theorie van maxima en minima treden in de laatste jaren sterk op de voorgrond. Het kan niet genoeg aanbevolen worden grafieken te maken van verschillende functies, vooral de gebroken functies. Vandaar, dat met aandrang wordt aanbevolen het werkschrift van P. WIJDENES, getiteld *Functies en Grafieken,* geheel door te werken en alles te tekenen, wat wordt opgegeven. Bij de logarithmen is het zaak zich goed in te werken in de vraagstukken, waarin met verschillende grondtallen gewerkt wordt. De zo vruchtbare reststelling, die bij de merkwaardige quotienten, bij de theorie der vierkantsvergelijkingen, bij het ontbinden, enz. zulke goede diensten kan bewijzen, vindt in de laatste jaren meer en meer toepassing. Al deze onderwerpen en meerdere bovendien vindt men uitvoerig en degelijk behandeld in: WIJDENES, *Lagere Algebra,* thans van beide delen *3e druk.* Dit is het enige leerboek, dat speciaal geschreven is ten dienste van de candidaten voor de akte Wiskunde L. O. Wie het heeft doorgewerkt, geeft tevens gehoor aan de telkens herhaalde raad der examencommissie „om toch vooral zich te oefenen in vraagstukken, die verder gaan dan verzamelingen, voor jeugdige leerlingen bestemd." Ter inleiding voor hen, die vroeger weinig aan wiskunde gedaan hebben, kan dienen de *Nieuwe School-Algebra* van denzelfden schrijver.

## Meetkunde.

Komt het in de wiskunde in 't algemeen op *doen* aan, vooral is dit het geval in de meetkunde, waar men niet altijd volgens vaste regels kan werken en dus meer vindingskracht nodig heeft. Veel vraagstukken maken dus; ze behoeven niet alle in 't net gemaakt te worden; die echter, welke men in 't net maakt, moeten goed

worden uitgewerkt. Het is beter wat minder vraagstukken schriftelijk te behandelen, maar dan volledig met een degelijke discussie, dan er een massa schriftelijk te maken, die maar half zijn uitgewerkt. Denk er vooral aan, de meetkundige plaatsen *volledig* te behandelen.

Gewen er u aan, steeds *zeer nette* tekeningen te maken; door een goede tekening is soms het vraagstuk reeds half opgelost. Vooral ook is oefening in het stereometrisch tekenen gewenst; het is een erkend feit, dat een massa studerenden en examinandi daarin totaal onbedreven blijken. Elk jaar moet de commissie haar klacht hierover herhalen. *Wie geen behoorlijke stereometrische figuur kan tekenen, kent niet voldoende stereometrie.* Men gebruike het boekje: *Wijdenes, Stereometrisch tekenen(f 0.50).*

Voor repetitie is het gewenst af en toe alle vraagstukken mondeling te herhalen, die men zich over een bepaald onderwerp kan herinneren of bijeen verzamelen, b.v. over de verschillende merkwaardige lijnen en punten in de vlakke driehoek, over machtlijnen, over de koordenvierhoek, over de eigenschappen van de boldriehoek (in de meetkunde van de bol schieten vele candidaten te kort), over de drievlakshoek, over het viervlak, over kruisende lijnen, enz. Wat de drievlakshoek aangaat, willen wij nog de aandacht er op vestigen, dat de commissie telkens en telkens de nadruk er op legt, dat men bedreven dient te zijn in de constructies der elementen daarvan en wat daar verder mee samenhangt.

Nog wijs ik er op, dat het aanbeveling verdient de theorema's van de Ceva en van Menelaos en de theorie der machtlijnen te kennen. Ook moet men enigszins met inversie vertrouwd zijn.

Toch moet men het eenvoudige niet verwaarlozen. De commissie klaagt er herhaaldelijk over, dat vele candidaten niet bedreven genoeg zijn in het geven van strenge verklaringen omtrent belangrijke onderwerpen uit de theorie, met name die betreffende evenredigheid van lijnstukken, oppervlakte van rechthoek en cirkel, verband bij een cirkel tussen middelpuntshoeken en de bogen, waarop zij staan, en andere.

Voor Planimetrie en Stereometrie zijn de enige boeken die van Dr. *P. Molenbroek,* waarvan de nieuwe drukken op zo voortreffelijke wijze door *P. Wijdenes* zijn bewerkt; thans beide 8ste druk.

## Gonio- en Trigonometrie.

Hier dient men allereerst vast in de schoenen te staan, wat de beginselen betreft: het herleiden tot het eerste kwadrant. Hierop berusten zowat alle formules en herleidingen. Het wordt niet gevergd (al kan het natuurlijk geen kwaad), dat men een massa formules van buiten kent, als men maar handigheid in het afleiden heeft. Om een voorbeeld te geven: ik ken flinke wiskundigen, die de

formules van sin $3\alpha$ en cos $3\alpha$ niet van buiten kennen, maar ze onmiddellijk weten af te leiden. Zo ook zal het niet geëist worden, dat men uit het hoofd tg $\frac{1}{2}\alpha$ in tg$\alpha$ kan uitdrukken; wel, dat men zonder aarzelen uit de formule voor de tangens van de dubbele hoek deze betrekking kan vinden en de twee antwoorden, die men krijgt, kan verklaren.

Flinke oefening in het logarithmisch maken, ook door middel van een hulphoek, is zeer gewenst. (Problema van Snellius, cosinusregel $a \cos x + b \sin x$, enz.).

In de trigonometrie is het aan te bevelen, dat men zich goed oefent in het berekenen der elementen van een driehoek uit allerlei gegevens. (Zie de mondelinge examenvragen.)

Verder moet de candidaat een flinke routine hebben in het oplossen van goniometrische vergelijkingen en in het bepalen van de uiterste waarden van eenvoudige goniometrische functies.

Er wordt ook prijs op gesteld, dat de candidaat *goniometrisch kan denken.* Velen willen een vraagstuk, dat hun uit de planimetrie bekend is of dat planimetrisch oplosbaar is, ook met planimetrie aanpakken en vergeten, dat het om de goniometrie te doen is.

Ook is het goed in een vraagstuk een eenvoudig geval van een algemeen vraagstuk te herkennen, maar het is niet goed dat eenvoudige geval uit het algemene te willen afleiden (wel desnoods later verifiëren) en de gemakkelijker manier, die bij het eenvoudige geval past, over het hoofd te zien.

Iets, waar vele candidaten niet aan denken, is de toepassing van de goniometrie op de meetkunde. Verschillende meetkundige eigenschappen en constructieopgaven kunnen zeer elegant met goniometrie worden opgelost; ook stereometrische. Het is zaak zich ook daarin te oefenen, daar dit op 't examen zeer op prijs wordt gesteld. (Zie vooral de artikelen in de *Tien Jaargangen I.*)

**Het** *boek,* met het oog op de akte L. O. geschreven, is het Leerboek der Gonio- en Trigonometrie van *P. Wijdenes* thans 4e druk; dit wordt sterk aanbevolen.

Een algemene opmerking, die door alle examencommissies en door die voor wiskunde in 't bijzonder dikwijls gemaakt wordt, is, dat het voor iemand, die later in een vak *onderwijs* wil geven, noodzakelijk is zich correct en nauwkeurig uit te drukken. Bij de beantwoording der gestelde vragen, zowel schriftelijk als mondeling, blijkt het telkens, dat tal van candidaten op dat gebied niet van slordigheid en onnauwkeurigheid zijn vrij te pleiten. Zo dit ergens niet te pas komt, dan toch zeker in de *wiskunde!* Zo constateert de commissie in haar verslagen, dat herhaaldelijk de woorden „midden" en „helft", „verhouding" en „evenredigheid", „ondeelbaar" en „onmeetbaar" verwisseld worden. Dikwijls wordt gesproken van de meetkundige plaats van „cirkels", als die van de „middelpunten"

# Boekenlijst voor Wiskunde L. O.

## ALGEBRA.

P. WIJDENES, **Lagere Algebra,** Leerboek voor de akte Wiskunde L.O.; 2 dln. met de uitwerkingen . . . .
**I,** 3e druk, *f* 5,50; Uitwerkingen *f* 2.—.
**II,** 3e druk, *f* 8,50; Uitwerkingen *f* 2.—.

P. WIJDENES, **Functies en Grafieken** . . . . . . *f* 1.25
Nog wordt gewezen op P. WIJDENES en Dr. H. J. E. BETH **Nieuwe Schoolalgebra IV,** waarvan de bestudering zeer gewenst is.

P. WIJDENES, **Nieuwe Schoolalgebra I,** 10e dr., **II,** 9e dr. *f* 2,25 **III,** 6e dr. *f* 2,25 antwoorden à *f* 1.—. (Dit kan voor mindergevorderden dienen als inleiding tot het vorige.)

Dr. B. GONGGRIJP, **Logarithmentafels in 5 decimalen.** Uitgave **D,** 6e druk . . . . . . . . . . . . *f* 2,50

**of** J. VERSLUYS, **Grote tafel H** 3e druk gec. *f* 2.75, geb. *f* 2.90

## PLANIMETRIE.

Dr. P. MOLENBROEK, **Leerboek der Vlakke Meetkunde,** 8e druk, ter perse; uitwerkingen, ter perse.

P. WIJDENES en Dr. D. DE LANGE, **Vlakke Meetkunde** 2 delen. **I,** 11e druk *f* 1,75, gec. *f* 2,00; **II,** 9e druk *f* 2,25 (Dit kan voor mindergevorderden als inleiding dienen tot het vorige.)

VERSLUYS—WIJDENES, **Methoden bij het Oplossen van Meetkundige Vraagstukken,** 4e druk *f* 2,50, geb. *f* 3,—

Prof. Dr. F. SCHUH, **Leerboek der Nieuwere Meetkunde van het vlak en van de ruimte,** *f* 10,50. (Dit werk alleen voor hen, die enkele hoofdstukken nog eens wat uitgebreider willen bestuderen.)

## STEREOMETRIE.

Dr. P. MOLENBROEK, **Leerb. der Stereometrie,** 8e dr. *f* 6.—
Uitwerkingen, 3e dr. . . . . . . . . . . . . - 2,25

P. WIJDENES, **Stereometrisch tekenen** . . . . . . - 0.50

wordt bedoeld, van het „kruispunt" van twee lijnen in plaats van het „snijpunt", enz.

Wij voegen hier los bij de volledige lijst van boeken, die de meeste aanbeveling verdienen bij de studie voor de akte L. O.; men bedenke, dat schoolboeken, zelfs de meest moderne, onvoldoende zijn voor de studie van volwassenen; men neme in geen geval verouderde slechte schoolboeken; aan het gebruik daarvan heeft menigeen zijn herhaald zakken te wijten.

Het **Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde** onder redactie van K. Harlaar en H. Herreilers is een **volmaakt veilige gids** voor het examen Wiskunde L. O.; de prijs is slechts *f* 6.— per jaargang van ongeveer 400 blz. gr. oct. met vele figuren en de **volledige oplossingen van de examenopgaven;** bovendien bevat iedere aflevering 12 vraagstukken ter oplossing van de zwaarte van het examen L. O.; in een volgend nummer vindt men de oplossingen; deze kunnen als **model** dienen; wie zo zijn vraagstukken op het examen inlevert, voldoet aan de hoogste eisen, die een examinator maar kan stellen; in het Nieuw Tijdschrift vindt men ook **uitgewerkte verslagen** van **mondelinge examens.** In de andere jaargangen vindt men vele belangrijke artikelen van direct nut voor het examen; ten gerieve van hen, die de vorige jaargangen niet hebben, is een bloemlezing verschenen van het belangrijkste uit de jaargangen 1—10 onder de titel:

# INHOUD.



# VRAAGSTUKKEN.

**Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde,** onder redactie van K. Harlaar en H. Herreilers, Amsterdam, met medewerking van de professoren: Dr. F. Schuh, Delft, Dr. Hk. de Vries, Amsterdam en Dr. J. de Vries, Utrecht, en van Dr. L. Crijns, P. Jansen, Dr. P. de Vaere, H. G. A. Verkaart, Dr. J. F. de Vries, P. Wijdenes en Dr. U. H. van Wijk.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1e Jaargang | 1913/14. | Prijs ing. *f* 3.60, geb. in stempelband . . . | *f* 4.85 |
| 2e „ | 1914/15. | „ „ - 4.80, „ „ „ . . . . | - 6.05 |
| 3e „ | 1915/16. | „ „ - 4.80, „ „ „ . . . . | - 6.05 |
| 4e/8e „ | 1916/21. | Uitverkocht. | |
| 9e/25e „ | | Prijs ing. *f* 6.—, geb. in stempelband . . . . . . . | - 7.25 |
| 26e Jaargang | 1938/39. | | |

De 5e jaargang bevat **een klapper** met een volledige systematische inhoudsopgave van de Jg. I—V, de 10e evenzo over de Jg. VI—X, de 15e een over Jg. XI—XV, de 20e over Jg. XVI—XX en de 25e over Jg. XXI—XXV.

Het **Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde,** verschijnt in 6 tweemaandelijkse afleveringen van minstens 4 vel druks gr. oct.; de artikelen, waarbij figuren behoren, worden flink geïllustreerd.

Het verschijnt ongeveer 1 Sept., 1 Nov., 1 Jan., 1 Maart, 1 Mei en 1 Juli. Prijs franco per post en bij de boekhandel *f* 6.—.

In afl. I komen reeds de schriftelijke examens met volledige oplossingen van L.O. en in afl. II die van K I.

H. G. A. VERKAART,
ROERMOND.

op elkaar af te beelden. Uit het bestaan daarvan mag niet worden afgeleid, dat omgekeerd elke afbeelding van de eene op de andere omkeerbaar eenduidig is. Tusschen de punten van een kegelsnede en die van een rechte in hetzelfde projectieve vlak ontstaat een eeneenduidige correspondentie, als wij de kegelsnede op de rechte projecteeren van een op haar gelegen punt uit, daarentegen een eentweeduidige correspondentie als wij het projectiecentrum buiten de kegelsnede en de rechte kiezen. Voorts heeft men naast de niet-singuliere ook de singuliere collineaties.

In de gelijkmachtigheid hebben wij een uitbreiding van het begrip „even-groot-zijn". Immers twee eindige verzamelingen zijn slechts eeneenduidig op elkaar af te beelden, als zij evenveel elementen bevatten, zoodat de eigenschap van het „even groot zijn" wordt vervangen door die der aequivalentie, welke ook beteekenis heeft voor oneindige verzamelingen. Tegelijkertijd neemt de machtigheid of het cardinaalgetal de plaats in, die vroeger het minder omvattende begrip „aantal elementen" bezette.

Evenals gelijkheid is ook ongelijkheid in grootte van twee oneindige verzamelingen te definieeren met behulp van een eeneenduidige afbeelding. Een verzameling heet kleiner dan een tweede, als zij met een deelverzameling daarvan, doch niet met die tweede zelf aequivalent is. Het probleem van het al of niet bestaan van een schaal der machtigheden, dat wil zeggen van het al of niet mogelijke van een rangschikking der oneindige verzamelingen naar grootte is thans herleid tot dat der vergelijkbaarheid van twee verzamelingen. Wij moeten nagaan of van twee gegeven niet-aequivalente verzamelingen steeds één een deelverzameling bevat, die met de volledige andere verzameling aequivalent is. Populair gezegd of van twee niet evengroote verzamelingen steeds één evengroot is als een gedeelte van de andere. Dit nu kunnen wij inderdaad aantoonen en wel door gebruik te maken van een stelling van Zermelo nl. dat elke verzameling welgeordend kan worden.

Bij de verdeeling der eenduidige afbeeldingen in eeneenduidige en niet eeneenduidige hebben wij thans wel voldoende stil gestaan, zoodat wij kunnen overgaan tot het toelichten van de splitsing op grond van continuiteit. Wij keeren daartoe nog eens terug tot het in het begin gegeven voorbeeld en constateeren, dat zonder uitzondering alle plaatsen op aarde, die slechts een kleinen afstand van een bepaalde stad zijn verwijderd, op de kaart worden

afgebeeld door punten, die zich in de buurt van het beeldpunt der stad bevinden. Deze eigenschap, zonder welke een kaart volkomen onbruikbaar is, berust op de continuiteit der bij de vervaardiging gebezigde projectiemethode.

Van een continue afbeelding van, op of in een verzameling kunnen wij alleen spreken, als zij tot een *omgevingsruimte* is gemaakt. Dit geschiedt door voor elk harer elementen (thans *punten* genoemd) zekere deelverzamelingen als omgevingen te definieeren. Een afbeelding heet dan in een punt P continu, als bij iedere omgeving van het beeldpunt P′ minstens één omgeving van het punt P behoort, die geheel binnen die omgeving van P′ wordt afgebeeld. Is een afbeelding in elk punt continu, dan betitelt men haar kortweg met continu. Door geschikte keuze van de axioma's, waaraan de omgevingen moeten voldoen, is te bereiken, dat in de gevallen, waarin de afbeelding is bepaald door functies, vóor de continuiteit daarvan noodig en voldoende is de continuiteit dezer afbeeldingsfuncties.

De tweede onderverdeeling, die wij van de eenduidige afbeeldingen maken door te scheiden continue en niet continue, is van de eerste onafhankelijk, want er komen zoowel omkeerbaar eenduidige als niet omkeerbaar eenduidige onder de continue voor en men heeft zoowel continue als niet continue eeneenduidige afbeeldingen. Bij de continue afbeeldingen onderscheiden wij verder nog omkeerbaar continue en niet omkeerbaar continue. De niet-identiteit der onderverdeelingen volgt ook daaruit, dat voor de eerste evenmin als voor de hoofdverdeeling beeld en voorwerp eenige andere eigenschap behoeven te bezitten, dan dat het geheelen zijn opgebouwd uit deelen, terwijl de tweede onderverdeeling onderstelt, dat voor beide relaties tusschen de deelen zijn gedefinieerd berustend op het begrip omgeving.

Een tweede hoofdverdeeling kunnen wij maken door eerst samen te voegen de afbeeldingen, waarvan beide verzamelingen geen gelijksoortige elementen bezitten, zoodat bijvoorbeeld punten met rechten correspondeeren en daarna bijeen te nemen de overgebleven afbeeldingen, waarvoor de elementen gelijksoortig zijn met de beeldelementen en derhalve punten aan punten worden toegevoegd, getallen aan getallen, enz.

In het eerste geval kan het gebeuren, dat de elementen der beeldverzameling deelverzamelingen zijn van de verzameling, die

afgebeeld wordt. Zoo wanneer men de reeds beschouwde poolverwantschap t.o.v. een kegelsnede opvat als een correspondentie tusschen punten en puntenreeksen.

Onder de afbeeldingen van de tweede soort zijn opnieuw twee typen op te merken en wel afbeeldingen van verzamelingen op zichzelf en afbeeldingen van verzamelingen op andere. Het is terstond in te zien, dat er zeker afbeeldingen van het eerste type bestaan, want iedere verzameling is identiek op zichzelf af te beelden, door elk element ervan aan zichzelf toe te voegen. Verder noemen wij de overgangen van een rechthoekig cartesisch coördinatenstelsel in een euclidisch plat vlak op een ander. Immers wordt het getallenpaar, dat men bij een zeker punt van het vlak kan plaatsen, toegevoegd aan dat, hetwelk men na afloop daarbij kan schrijven en heeft in de coördinatentransformatie een afbeelding plaats van de verzameling der geordende getallenparen op zichzelf.

Een belangrijk vraagstuk, dat zich bij elke afbeelding van dit type voordoet, is het opsporen van de elementen, die met hun beeld samenvallen. Zoo bezit bijvoorbeeld de algemeene projectieve transformatie van het projectieve vlak in zichzelf drie dergelijke dubbelpunten en heeft een continue zelfafbeelding van een bol steeds minstens één dubbelpunt.

Zoowel de afbeeldingen van de eerste soort, als die van beide typen van de tweede soort, kan men verder rubriceeren door diegene samen te voegen, waarvan voorwerp en beeld twee bepaalde gegeven eventueel samenvallende verzamelingen zijn. Deze nadere verdeeling was ook mogelijk na de eerste hoofdverdeeling en de daarbij behoorende onderverdeelingen, doch had toen minder zin, omdat — zooals reeds werd opgemerkt — twee verzamelingen bijvoorbeeld zeer goed zoowel eeneenduidig als eentweeduidig op elkaar afbeeldbaar kunnen zijn.

Onder de afbeeldingen van een gegeven verzameling op een tweede gegeven nemen natuurlijk de omkeerbaar eenduidige weer een bijzondere plaats in. In een speciaal geval kunnen wij daarvan een onderverdeeling maken, die verder gaat dan die in omkeerbaar en niet omkeerbaar eenduidige.

Wij verstaan met Brouwer onder een *complex* een omgevingsruimte, die een bepaalde splitsing in simplexen toestaat en laten zien, dat de eenduidig continue afbeeldingen van een dergelijk complex in of op een eventueel daarmede samenvallend tweede,

zich laten onderbrengen in afbeeldingsklassen. Vooraf ga ter verduidelijking een voorbeeld.

Wentelen wij een boloppervlak een weinig om een zijner middellijnen, dan verkrijgen wij een eenduidige continue zelfafbeelding daarvan. Wij vergelijken deze met een tweede van hetzelfde type, die na voortgezette wenteling ontstaat en constateeren, door te letten op de tusschenstanden, die worden ingenomen, dat beide afbeeldingen het begin en het eind vormen van een continue reeks van gelijksoortige. Vervangen van alle punten van het boloppervlak door hun tegenpunten, geeft een derde eenduidige continue zelfafbeelding daarvan, die niet continu uit de eerste is te verkrijgen, daar ze anders dan deze den omloopszin van kleine cirkels op het boloppervlak omkeert.

Stappen wij van dit speciale geval, waarin de afbeeldingen bovendien eeneenduidig en omkeerbaar continu of topologisch zijn af en beschouwen wij weer algemeen eenduidig continue, dan kan tusschen twee daarvan ook een continue reeks van afbeeldingen bestaan. Wij zeggen nu, dat de eerste in de tweede homotoop is te deformeeren. Op het feit, dat deze eigenschap zoowel reflexief als transitief is, berust de mogelijkheid alle eenduidige continue afbeeldingen van een willekeurig complex op zichzelf of in een ander te verdeelen in klassen, de zoogenaamde afbeeldingsklassen, die elk uitsluitend homotoop in elkaar deformeerbare afbeeldingen bevatten. Uit ons voorbeeld bleek, dat de wentelingen en spiegelingen van een boloppervlak in zichzelf, tot verschillende afbeeldingsklassen moeten worden gerekend, hoewel beide afbeeldingen topologisch zijn. Terwijl er hier niet meer dan deze twee zijn heeft men op het ringoppervlak zelfs oneindig vele klassen van topologische zelfafbeeldingen.

Gekomen aan het einde van de behandeling van enkele mogelijke indeelingen der afbeeldingen, stellen wij vast, dat hetgeen wij deden in wezen niet anders was, dan het definieeren van deelverzamelingen binnen de verzameling van alle afbeeldingen. Deze opmerking doet uitkomen, dat er ook verzamelingen bestaan met afbeeldingen als elementen, waaruit voortvloeit, dat bij een of andere afbeelding het beeld van een punt een afbeelding kan wezen. Elke verschuiving van een euclidische rechte lijn in zichzelf is te beschouwen als een zelfafbeelding der rechte. Een willekeurig exemplaar van de oneindige verzameling dezer afbeeldingen is

bepaald door het punt, waarin een vast punt wordt afgebeeld. Met ieder punt der rechte staat hierdoor een afbeelding der verzameling in correspondentie, en derhalve worden de punten der rechte eenduidig afgebeeld op de verzameling aller verschuivingen.

Bij de afleiding van het begrip gelijkmachtigheid van twee verzamelingen, hebben wij medegedeeld, wat onder het product van twee afbeeldingen was te verstaan. Natuurlijk bezitten twee afbeeldingen slechts een product, indien de beeldverzameling van de eerste, de afgebeelde van de tweede is. Is nu per definitie een groep een verzameling, waarvoor een aan bepaalde eigenschappen voldoende vermenigvuldiging is gedefinieerd, zoodat aan elk geordend tweetal elementen een derde element der verzameling, genaamd het product, is toegevoegd, dan kan een aantal afbeeldingen slechts een groep vormen, indien alle exemplaren zelfafbeeldingen zijn. Voorbeelden van groepen hebben wij in de verzameling aller eeneenduidige zelfafbeeldingen en in die aller topologische zelfafbeeldingen eener gegeven verzameling, terwijl de juist genoemde verschuivingen van een rechte lijn in zichzelf een eenledige continue groep opbouwen.

Wij bespreken in de derde plaats enkele toepassingen van het afbeelden en beginnen met er op te wijzen, dat in de stereometrie uitsluitend eigenschappen van oppervlakken en lichamen worden opgespoord, die behouden blijven, wanneer de beschouwde figuren op een of andere wijze in de ruimte worden verplaatst. Breiden wij alle mogelijke verplaatsingen van een oppervlak of lichaam in de ruimte uit tot bewegingen van de geheele euclidische driedimensionale ruimte in zichzelf, dan ontstaat een verzameling zelfafbeeldingen, die een groep is. Toepassen van een exemplaar dezer groep geeft beeldfiguren, die met hun oorspronkelijk alle stereometrische eigenschappen gemeen hebben. Deze eigenschappen zijn dus bestand tegen of invariant voor de groep van zelfafbeeldingen of, zooals men gewoonlijk zegt, transformatiegroep.

Het blijkt, dat de stereometrie in wezen niet anders is dan de invariantentheorie voor een bepaalde de vorige omvattende groep. Dit is van groot belang, want hebben twee congruente of stereometrisch aequivalente figuren volkomen dezelfde stereometrische eigenschappen, dan kan met de bestudeering van een ervan worden volstaan. Het geoorloofd zijn van een overeenkomstige beperking is voor elke meetkunde een vereischte. Immers zijn na de

bestudeering van één der *figuren* genaamde verzamelingen, waarop de meetkunde betrekking heeft niet tevens de bijzonderheden van een groot aantal andere bekend, dan is de geheele studie een vrij onbegonnen werk. Derhalve zal elke meetkunde een middel moeten bezitten om van twee figuren na te gaan of zij op het ingenomen standpunt als identiek zijn te beschouwen. Nu is vergelijken van twee figuren feitelijk toevoegen van de elementen der eene aan die van de andere figuur, dus tot stand brengen van een afbeelding. Een middel als gezocht heeft men dientengevolge in het onderzoek of de eerste figuur op een bepaalde vooraf vastgestelde wijze op de tweede is af te beelden. Elke meetkunde zal in correspondentie moeten staan met een zekere verzameling van afbeeldingen en tot inhoud hebben het opsporen van eigenschappen, die bij deze afbeeldingen behouden blijven.

Niet alle verzamelingen van afbeeldingen van zekere figuren zullen bij een meetkunde kunnen behooren. Immers bezit figuur A dezelfde eigenschappen als figuur B, dan heeft omgekeerd B dezelfde als A, zoodat een verzameling, die een afbeelding van A op B bevat, er ook een van B op A moet bevatten. Is verder aanwezig een afbeelding van B op C, dan moet dit ook het geval zijn met een van A op C, want hebben eveneens B en C alle eigenschappen gemeen, dan ook A en C.

Onder de verzamelingen, die wij bij onze indeelingen ontmoetten, bevinden zich enkele uitgebreide geoorloofde verzamelingen, die leiden tot zeer algemeene meetkunden. Dit is aan te toonen, door te bewijzen, dat zij aan de zoo juist opgesomde voorwaarden voldoen. Het is van te voren te verwachten, dat de beide hoofdverdeelingen ons zullen doen uitkomen bij meetkunden van verschillend karakter.

Een eerste voorbeeld van een toegelaten verzameling is die aller eeneenduidige afbeeldingen, daar de omgekeerde van een willekeurig exemplaar weer tot de verzameling behoort en eveneens, indien dit bestaat het product van twee exemplaren. Uit de identiteit van omkeerbaar eenduidig op elkaar afbeeldbaar zijn en gelijkmachtig zijn, volgt dat in de bijbehoorende meetkunde alle figuren volkomen zijn getypeerd door één enkel gegeven nl. hun machtigheid. Aangezien deze dus het al of niet voorkomen van eventueele andere voor eeneenduidige afbeeldingen invariante eigenschappen bepaalt, zal men geneigd zijn te vermoeden, dat het

bezitten van een bepaalde dimensie een gevolg is van het bezit van een bepaalde machtigheid. Zulks echter ten onrechte, want, daar het mogelijk is een rechte lijn omkeerbaar eenduidig op een plat vlak af te beelden, bestaan er gelijkmachtige figuren met verschillende dimensies. Evenmin als tegen elke eeneenduidige afbeelding is het dimensiegetal bestand tegen elke eenduidig continue, hetgeen Peano in staat stelde een kromme te construeeren, die een geheel vierkant opvult. De oogenschijnlijk voor figuren fundamenteele eigenschap van het aantal dimensies is eerst voor eeneenduidige, omkeerbaar continue of topologische afbeeldingen invariant.

De verzameling aller topologische afbeeldingen, waartoe wij hiermede gekomen zijn, is een tweede voorbeeld van een bruikbare verzameling.

In de topologie, dat is de meetkunde, die de eigenschappen van topologisch afbeeldbare figuren bespreekt, welke invariant zijn voor topologische afbeelding, heeft het dimensiegetal niet zoo groote beteekenis als het cardinaalgetal in de vorige meetkunde. Gelijkheid van dimensie waarborgt geen topologische aequivalentie of homeomorphie en kan gepaard gaan met het bezit van verschillende topologische eigenschappen. Boloppervlak en ringoppervlak zijn beide tweedimensionaal, doch kunnen niet eeneenduidig omkeerbaar continu op elkaar worden afgebeeld, zooals blijkt uit het onderscheiden aantal klassen van topologische zelfafbeeldingen, dat, naar wij mededeelden, op elk bestaat. Dit aantal is nl. voor twee homeomorphe figuren even groot en zal voor elke figuur, die topologisch beeld van het boloppervlak kan wezen, twee zijn. Wij merken nog op, dat homeomorphie met een bepaalde figuur een eigenschap is, die bestand is tegen topologische afbeelding, zoodat evengoed als het vaststellen van gelijkmachtigheid van twee figuren in de vorige, het aantoonen van homeomorphie in deze meetkunde een belangrijk onderdeel zal vormen.

Als derde voorbeeld kiezen wij een verzameling voorkomend bij de tweede hoofdindeeling nl. de groep aller zelfafbeeldingen van een gegeven figuur. De bijbehoorende meetkunde bespreekt van één enkele hoofdfiguur alle eigenschappen, daar deze vanzelfsprekend bij elke zelfafbeelding behouden blijven. Figuren, die een deel van de hoofdfiguur vormen, zullen in het algemeen weinig eigenschappen bezitten, die invariant zijn voor de geheele groep

en dus in de betrokken meetkunde thuis behooren. Wenscht men de bijzonderheden van de hoofdfiguur met al haar onderdeelen volledig te kennen, dan kan men beginnen met van de groep van zelfafbeeldingen alle deelverzamelingen te bepalen, waarvoor de boven aan de geheele verzameling gestelde eischen zijn vervuld. Deze deelverzamelingen zijn opnieuw groepen van zelfafbeeldingen of transformatiegroepen, welke aanleiding geven tot meetkunden binnen de hoofdfiguur, waarin ook boven uitgesloten eigenschappen der deelfiguren eén plaats hebben. Natuurlijk is iedere eigenschap, die invariant is voor de geheele groep, tevens invariant voor een willekeurige ondergroep. Zoo is bijvoorbeeld iedere projectieve eigenschap der driedimensionale ruimte tevens een stereometrische eigenschap, omdat de groep der bewegingen en spiegelingen een ondergroep is van de projectieve groep.

Onder de eigenschappen van de deelfiguren kunnen er voorkomen, die een gevolg zijn van het tot de hoofdfiguur behooren. Zulke zal men dus niet vinden, indien men de deelfiguur op zichzelf beschouwt of als onderdeel van een andere hoofdfiguur. Terwijl in de planimetrie twee symmetrische driehoeken zich onderscheiden door een tegengestelde orientatie, kan in de stereometrie aan driehoeken geen omloopszin worden toegekend. Ombuigen van een rechthoekige strook tot twee overstaande zijden samenvallen kan zóó geschieden, dat een cylindervormige band ontstaat of zóó, dat een band wordt gevormd, waarin zich een geheele slag bevindt. Natuurlijk zijn deze figuren homeomorph, doch men zal dit niet gevonden hebben na volledige behandeling van alle meetkunden, die de invariantentheorie zijn van een groep van topologische zelfafbeeldingen der driedimensionale ruimte, waarin de figuren zijn gedefinieerd. Tot invariant van een transformatiegroep is de genoemde homeomorphie te maken door de figuren op te nemen in een vierdimensionale ruimte en de zelfafbeeldingen daarvan te bezien.

Wordt een hoofdfiguur eeneenduidig afgebeeld op een andere, dan gaan alle transformaties van een daarvoor bekende groep over in zelfafbeeldingen van de tweede, die weer een groep vormen. Twee deelfiguren van de eerste hoofdfiguur, die in de meetkunde behoorend bij de eerste groep congruent zijn, bezitten beeldfiguren, die congruent zijn in de meetkunde van de tweede hoofdfiguur behoorend bij de tweede groep. Elke eigenschap van een figuur in

de eerste meetkunde zal dan ook correspondeeren met een eigenschap van haar beeldfiguur in de tweede meetkunde, zoodat de eene meetkunde met behulp van de afbeelding uit de andere is te verkrijgen. In de praktijk maakt men hiervan soms gebruik, wanneer men in een bepaalde meetkunde niet of niet eenvoudig in staat is een stelling te bewijzen of ook een ingewikkelde stelling wenscht te verduidelijken.

De eerste opgave, die men zich gesteld ziet, is uit de met de gegeven hoofdfiguur aequivalente figuren er een te kiezen om te fungeeren als tweede hoofdfiguur. Al speelt bij deze keus persoonlijke voorkeur een zekere rol, toch zijn, zooals Schaake opmerkt, wel enkele regels te vinden, welker inachtneming de kans, dat de afbeelding het gewenschte resultaat oplevert, verhoogt. Vooral in aanmerking komen puntverzamelingen en daaronder weer de lineaire ruimten, omdat de meetkunden, die stelsels van punten bestudeeren eenvoudiger en bovendien langer beoefend zijn dan vele andere. Verder heeft men te bedenken, dat voldoende moet zijn onderzocht, welke soorten afbeeldingen van de eerste hoofdfiguur op de tweede mogelijk zijn. Immers moet ook de tweede opgave nl. het construeeren van een eeneenduidige afbeelding, waarbij de beeldfiguren der beschouwde en de beeldeigenschappen niet ingewikkeld van aard zijn, eenvoudig zijn te volbrengen en met dezen eisch kan bij het kiezen der tweede hoofdfiguur alleen rekening worden gehouden, indien reeds classificaties van de afbeeldingen der oorspronkelijke hoofdfiguur op andere bekend zijn.

Uit het feit, dat men weet, dat beide hoofdfiguren aequivalent zijn, volgt, dat tenminste één omkeerbaar eenduidige afbeelding van de eene op de andere bekend moet zijn. Zijn alle dergelijke afbeeldingen, die men kent, onbruikbaar voor het gestelde doel, dan komt men soms vooruit door eerst een eeneenduidige afbeelding met singuliere elementen te nemen en vervolgens te trachten deze om te zetten in een zonder singuliere elementen door aan de gekozen hoofdfiguur hetzij elementen toe te voegen, hetzij elementen te onttrekken. Feitelijk beteekent dit een overgaan op een nieuwe tweede hoofdfiguur.

Als eerste voorbeeld hiervan behandelen wij de afbeelding van een boloppervlak op een zijner raakvlakken, die projectie van al zijn punten op het raakvlak uit het tegenpunt van het raakpunt tot stand brengt. Bij deze methode van afbeelden, die in wezen

niet verschilt van de door Hipparchus terwille van de sterrekunde geconstrueerde stereografische projectie, correspondeert met elk punt op den bol, behalve met het centrum van projectie één enkel punt van het vlak, terwijl aan elk punt van het vlak één punt van het boloppervlak is toegevoegd. Sluiten wij nu het vlak niet zooals gewoonlijk met een oneindig verre rechte, doch met een oneindig ver punt af, dan verkrijgen wij een nieuwe tweede hoofdfiguur, die den samenhang van het boloppervlak heeft en daarvan het zonder uitzondering omkeerbaar eenduidige beeld kan zijn. Ook is het mogelijk aan het boloppervlak den samenhang van het euclidische vlak te geven en wel door daaraan het centrum van projectie te onttrekken.

Een meer sprekend voorbeeld bieden de eeneenduidige afbeeldingen der lijnelementen van een projectief plat vlak op de punten van een lineaire driedimensionale ruimte. Die, waarbij zonder uitzondering aan elk lijnelement, dat is de figuur gevormd door een (eventueel oneindig ver) punt en een daar door heen gaande rechte, (die eventueel met de oneindig verre rechte kan samenvallen), een punt der ruimte omkeerbaar eenduidig is toegevoegd, bezitten geen eenvoudig type. Een zoodanige afbeelding blijkt echter mogelijk, nadat aan de ruimte een verzameling punten is toegevoegd. Dit kan o.a. zóó geschieden, dat de ruimte daardoor den samenhang verkrijgt van een in een lineaire zevendimensionale ruimte gelegen driedimensionale varieteit van den zesden graad. De projectieve meetkunde der lijnelementen is daarmede in correspondentie gebracht met een Cremonasche ruimtemeetkunde, terwijl de projectieve transformatiegroep is overgegaan in een gemengde groep van Cremonasche punttransformaties met acht parameters.

Groote analogie met de zoo juist besprokene, vertoont de bekende door Klein ontdekte afbeelding van de rechten eener driedimensionale projectieve ruimte op de punten van een vierdimensionale varieteit van den tweeden graad gelegen in een vijfdimensionale ruimte. Bij deze afbeelding gaat de projectieve groep der driedimensionale ruimte over in de ondergroep van die der vijfdimensionale ruimte, gevormd door de projectieve transformaties, die de varieteit invariant laten.

Tenslotte vermelden wij nog een der afbeeldingen van deze soort, die in de hoogere meetkunde wegens de groote vruchtbaarheid hunner toepassing den naam *overdrachtsprincipes* hebben

verkregen. Wij behandelen als voorbeeld het principe van Hesse, dat aldus is te beschrijven: Laat met iedere rechte van een projectief plat vlak correspondeeren het puntenpaar, waarin zij een vaste kegelsnede snijdt en projecteer daarna deze kegelsnede uit een harer punten op een vaste rechte. Dan worden de niet georienteerde puntenparen der vaste rechte zonder uitzondering omkeerbaar eenduidig afgebeeld op de rechten van het projectieve vlak, terwijl de punten daarvan als beelden bezitten de involuties op de vaste rechte. Deze afbeelding doet de fundamenteele stelling, dat door twee punten steeds één rechte is bepaald, overgaan in de eveneens fundamenteele, dat twee involuties steeds een paar gemeen hebben. Uit het feit, dat een eigenschap in de eene meetkunde belangrijk is, volgt echter niet noodzakelijk, dat de correspondeerende eigenschap in de andere dit ook is. Zoo worden o.a. de stellingen van Pascal en Brianchon getransformeerd in andere, die vrijwel zonder beteekenis zijn.

Wij beeindigen hiermede de bespreking van toepassingen van zuiver meetkundigen aard en geven nog enkele voorbeelden van gevallen, waarin verzamelingen van ongelijksoortige elementen optreden. De zooeven genoemde afbeelding van lijnelementen was ontleend aan een publicatie van Beck, waaraan ten grondslag lagen twee afbeeldingen door Lie geconstrueerd ten behoeve van de theorie der differentiaalvergelijkingen. Deze theorie heeft wel vele aanknoopingspunten met meetkundige problemen, doch is zuiver analytisch te behandelen en de afbeeldingen van Lie dienen vooral om enkele uitkomsten te verduidelijken. Zij stelden Poincaré in staat verschillende moeilijkheden met betrekking tot de singuliere integralen van gewone vergelijkingen in $x$ en $y$ van de eerste orde toe te lichten, hetgeen voor de partiëele differentiaalvergelijkingen in $x$, $y$ en $z$ van de eerste orde, mogelijk werd door een afbeelding op een vijfdimensionale ruimte afkomstig van De Vries en Schaake. Daar volgens de gegeven algemeene definitie iedere transformatie in wezen een afbeelding is, wordt van afbeelden niet alleen ter toelichting, doch dikwijls ook ter oplossing van een differentiaalvergelijking gebruik gemaakt.

Naar het terrein van de functietheorie begeven wij ons via een afbeelding van Gauss. Wij laten met ieder complex getal $x + iy$ dat punt van een euclidisch plat vlak correspondeeren, dat ten opzichte van een vast rechthoekig coördinatenstelsel de coördinaten

$x$ en $y$ heeft en voegen omgekeerd aan ieder punt met coördinaten $x$, $y$ toe het complexe getal $x + iy$. Daarmede is een afbeelding van de complexe getallen op de punten van het vlak gedefinieerd, die zonder uitzondering omkeerbaar eenduidig is, indien wij het getal oneindig niet toelaten. Doen wij dit wel, dan moet aan het vlak een punt worden toegevoegd, waardoor dit, zooals wij bij de stereografische projectie vonden, den samenhang van den bol verkrijgt en dus het Gaussische complexe vlak vervangen wordt door den Gaussischen complexen bol.

Teneinde nu een eenwaardige functie $w$ van een complexe veranderlijke $z$ meetkundig te kunnen interpreteeren, hebben wij twee vlakken noodig. Beelden wij in het eene, het $z$-vlak, op de aangegeven wijze een waarde van de veranderlijke $z = x + iy$ af en in het andere, het $w$-vlak, analoog de bijbehoorende waarde van de functie $w = u + iv$, dan is op grond van de functie aan een punt van het $z$-vlak een van het $w$-vlak toegevoegd. De functie bewerkt derhalve eenduidige afbeelding van het $z$-vlak in het $w$-vlak, of als zij niet voor het geheele $z$-vlak is gedefinieerd, van een gedeelte daarvan op een gedeelte van het $w$-vlak. Deze afbeelding behoeft niet omkeerbaar eenduidig te zijn, want bij functies, wier inverse niet eenwaardig is, zal een beeldpunt in het $w$-vlak in het algemeen met meer dan één punt van het $z$-vlak correspondeeren. Noemen wij een gebied, waarin een eenwaardige functie $w$ van $z$ al haar waarden één en niet meer dan eenmaal aanneemt een *fundamentaalgebied*, dan zijn twee fundamentaalgebieden zonder uitzondering eeneenduidig op elkaar afbeeldbaar en wel door aan elkaar toe te voegen de punten, die bij hetzelfde punt in het $w$-vlak behooren. Afbeeldingen van deze soort ontmoet men vooral bij de theorie der automorphe functies, dat zijn functies met een lineaire transformatie in zichzelf.

Sommige functies zijn fraaier toe te lichten door niet af te beelden op twee verschillende, doch op twee samenvallende vlakken of bollen. Met de functie $w = z + a$ correspondeert dan een translatie van het vlak en met de functie $w = \frac{1}{z}$ een wenteling van den bol om één zijner middellijnen over een hoek van 180°.

Bij afbeeldingen van functies $y$ van een *reëele* veranderlijke kan zoowel wanneer deze functies eenwaardig, als wanneer ze

meerwaardig zijn, volstaan worden met één enkel vlak, waarin een vast rechthoekig coördinatenstelsel is gekozen. Afbeeldingen van meerwaardige functies van één complexe veranderlijke geven echter zelfs bij gebruik van een $z$-vlak en een $w$-vlak nog geen voldoende verduidelijking. Men maakt hierom de functie eenwaardig en daarmede de afbeelding op het $w$-vlak eenduidig door het $z$-vlak uit te breiden tot een Riemannsch oppervlak.

Wij gaan hierop niet verder in, maar wijzen op een eigenschap die de door de functies van een complexe veranderlijke bewerkte afbeeldingen en trouwens ook andere bezitten. Wanneer de elementen van twee aequivalente verzamelingen gelijksoortig zijn en het in beide mogelijk is, dat aan de deelfiguren een bepaalde eigenschap toekomt, kan men onderzoeken of er afbeeldingen van de eerste op de tweede zijn, die de beschouwde eigenschap niet aantasten. Zijn twee oppervlakken of gedeelten daarvan gelegen binnen een euclidische driedimensionale ruimte, dan heeft elke normale kromme of rechte lijn zoowel van het eene als van het andere exemplaar een zekere lengte. Een vraag is nu of er een afbeelding van het eerste op het tweede bestaat, die *isometrisch* of *lengtetrouw* is, d.w.z. waarbij alle rechte of kromme lijnstukken overgaan in beeldfiguren van gelijke lengte. Het antwoord luidt niet steeds bevestigend, want bijvoorbeeld zijn volgens Gauss en Bonnet in een plat vlak alleen die oppervlakken isometrisch af te beelden, die deswege ontwikkelbare regeloppervlakken genoemd worden. Een merkwaardigheid van alle dergelijke lengtetrouwe afbeeldingen is, dat zij nog een tweede eigenschap invariant laten nl. de hoekgrootte en dus ook *hoektrouw* of *conform* zijn. De hoektrouw waaruit, zooals de stereografische projectie toont, niet noodzakelijk de lengtetrouw volgt, is nu de bedoelde eigenschap, die de behandelde afbeeldingen van een $z$-vlak op een $w$-vlak in het algemeen bezitten en in de functietheorie nemen onderzoekingen verband houdend met conforme afbeeldingen een belangrijke plaats in.

Bij de motiveering van de keuze van ons onderwerp gewaagden wij ook van het gebruik van afbeeldingen in de toegepaste wiskunde. Wij willen daarom nog even onze aandacht richten op de sterrekunde, waarin men de bewegingen van hemellichamen dikwijls bestudeert met behulp van een hemelbol. Dit is niet anders dan een bol met willekeurigen straal en geschikt gekozen

middelpunt, waarop men alle hemellichamen geprojecteerd denkt uit het middelpunt. Elke sterrekundige zal van meening zijn, dat men hier te doen heeft met een afbeelding, daarentegen zal niet ieder instemmen met een uitspraak van een Zuid-Afrikaanschen onderzoeker, die ik wegens haar belang voor de christelijke wetenschap hier zonder beoordeeling wil vermelden. Zij luidt: „Als een sterrekundige spreekt van „lichtjaren" is dat een beeld, dat betrekking heeft op onze aardsche waarnemingen en afgeleid wordt uit onze aardsche toestanden, ook afhankelijk van de al dan niet aanvaarding van een homogene ruimte en dientengevolge ook van homogene beweging — maar of de absolute werkelijkheid aan deze beeldspraak beantwoordt is daarmede nog niet beslist."

Wij behoeven aan de gegeven voorbeelden geen andere toe te voegen om voldoende grond te hebben voor de uitspraak, dat in vele opzichten de mogelijkheid om afbeeldingen te maken het is, die den wiskundigen in staat stelt zijn taak te overzien en uit te voeren. Vaststellen hiervan is zeer belangrijk, daar de opdracht tot wetenschapsbeoefening en daarmede tot wiskundestudie door God is gegeven. Het bestaan van dezelfde relaties tusschen de elementen van oppervlakkig beschouwd dikwijls totaal onderscheiden figuren, dat de grond der overdrachtsprincipes is, wijst er op, dat deze figuren behooren tot het werk van den eenigen Schepper. Wij komen in dit verband terug op de in het begin genoemde zegswijze: „een punt is twee getallen," voegen daaraan toe deze andere: „de figuur bij dit meetkundige bewijs dient alleen ter illustratie" en vermelden het verschijnen van een boek onder den typeerenden titel „Anschauliche Geometrie". Deze gezegden toonen, dat er dient te worden opgepast voor het uit het oog verliezen van de groote verscheidenheid in de schepping, doordat practisch de objecten gemaakt worden tot de som van een aantal hunner eigenschappen.

Tot het begrip van een verzameling van elementen met bepaalde eigenschappen komt men, door uit de voorstelling van een ding der werkelijkheid, die kenmerken te abstraheeren en tot een denkeenheid te vereenigen, die betrekking hebben op opbouw en samenhang. Daarbij zal men uitgaande van voorstellingen van verschillende dingen kunnen komen tot dezelfde verzameling, hetgeen omgekeerd wil zeggen, dat met een bepaalde verzameling meer dan één ding in de werkelijkheid correspondeeren kan. Zoo

ontstaat het probleem om bij een gegeven abstracte verzameling, die meestal een groep is, *realisaties* of „Darstellungen" te vinden. Van deze „Darstellungstheorie" moeten wij melding maken, omdat, zooals duidelijk is, twee verschillende Darstellungen van eenzelfde abstracte groep met behulp van deze laatste op elkaar kunnen worden afgebeeld.

Bouwt men axiomatisch een tweedimensionale meetkunde op, dan begint men met de mededeeling, dat men beschouwen zal een verzameling van elementen, punten genaamd, waarbinnen deelverzamelingen, lijnen geheeten, voorkomen. Daarna gaat men enkele relaties opstellen, die per definitie tusschen punten en lijnen zullen bestaan, om vervolgens met behulp van een realisatie of model te bewijzen, dat de axioma's niet met elkaar in tegenspraak zijn. Het feit, dat de axioma's der niet-euclidische tweedimensionale meetkunde niet tot tegenstrijdigheden voeren, wordt bijvoorbeeld in het Riemannsche geval, afgeleid uit de mogelijkheid deze meetkunde af te beelden op de meetkunde van een binnen een euclidische driedimensionale ruimte gelegen bol, waarvoor men dan het vrij van tegenspraak zijn bewezen acht. Zeer merkwaardig is, dat de axioma's der projectieve vlakke meetkunde met hetzelfde doel worden gerealiseerd in de analytische meetkunde van het projectieve getallenvlak. Immers het niet tegenstrijdig zijn der axioma's daarvan steunt in laatste instantie op het zonder tegenspraak zijn van de leer van natuurlijke getallen, hetwelk nog niet is bewezen met zuiver wiskundige middelen.

Dat desondanks deze axioma's en dientengevolge die der projectieve meetkunde vrij van tegenspraak zijn, vormt voorloopig nog een aprioristisch oordeel. Hierdoor wordt de zekerheid der wiskunde niet verminderd, want zonder aprioristische oordeelen is geen wetenschap mogelijk. Zij zijn bovendien niet opgekomen uit de rede, noch door zuivere waarneming verkregen, doch worden gewerkt door een algemeen inwendig getuigenis des Heiligen Geestes, hetwelk in den mensch kan plaats hebben, omdat hij zelf beelddrager Gods is (Hepp).

---

# HOOFDSTUK VI.

## CIRKELMETING.

1. Het werk over de cirkelmeting, waarin Archimedes de verhouding van omtrek en diameter van een cirkel afleidt, die een der meest populaire resultaten van zijn wiskundige onderzoekingen zou worden, is een zeer kort, slechts drie proposities omvattend geschrift. Het is, èn blijkens zijn taal, waaruit elk spoor van den Siculo-Dorischen tongval verdwenen is èn blijkens den betoogtrant, die fragmentarisch is en weinig verzorgd, niet in de oorspronkelijke redactie tot ons gekomen. Het is mogelijk, dat het stuk, dat wij bezitten, slechts een deel is geweest van een grooter werk, dat door Pappos [1]) geciteerd wordt onder den titel *Over den omtrek van den cirkel* (*περὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας*) en dat daarin ook de meer algemeene vraag naar de verhouding van de lengte van een cirkelboog tot die van zijn koorde behandeld is [2]).

De eerste propositie heeft tot doel, de arithmetische quadratuur van den cirkel tot de arithmetische rectificatie terug te voeren, dus te toonen, dat men de oppervlakte van een cirkel met gegeven straal kan berekenen, zoodra men den omtrek kent.

Propositie 1.

*Iedere cirkel is gelijk aan een rechthoekigen driehoek, waarvan een der rechthoekszijden gelijk is aan den straal en de basis [d.i. de andere rechthoekszijde] aan den omtrek [van den cirkel].* [3])

Het bewijs wordt geleverd met behulp van de indirecte methode ter behandeling van oneindige processen (verschilvorm van de

---

[1]) Pappos, *Collectio* V, 2; 312, l. 20. Tenzij men met Hultsch (loc. cit. 313, noot 1) wil aannemen, dat de schrijver hier den titel van het werk van Archimedes in vrijen vorm citeert.

[2]) Aldus het vermoeden van A. Favaro, *Archimede*; Roma 1923 p. 53.

[3]) Vrije vertaling van den onduidelijken Griekschen tekst: *πᾶς κύκλος ἴσος ἐστὶ τριγώνῳ ὀρθογωνίῳ, οὗ ἡ μὲν ἐκ τοῦ κέντρου ἴση μιᾷ τῶν περὶ τὴν ὀρθήν, ἡ δὲ περίμετρος τῇ βάσει.*

PROSPECTUS

# NOORDHOFF'S TAFEL

IN

# VIER DECIMALEN

11e—15e DUIZENDTAL

88 blz. in slap linnen geb. *f* 1.—

P. NOORDHOFF N.V. — 1938 — GRONINGEN-BATAVIA

**IN DE BOEKHANDEL VERKRIJGBAAR**
**en bij N.V. Uitgevers-Maatschappij**
**NOORDHOFF-KOLFF, Laan Holle 7,**
**Batavia C.**

# INHOUD

Bij de samenstelling van

## NOORDHOFF'S TAFEL IN VIER DECIMALEN

hebben we als eerste eis gesteld, dat deze gemakkelijk in het gebruik zou zijn, dus met zo weinig mogelijk interpolaties en indien ze nodig zijn, met zo kleine getallen, dat men daarvoor niets heeft op te schrijven; verder hebben we gemeend de tafel op de eenvoudige, normale wijze in te richten, zoals de tafels in vijf decimalen; er is alles voor en niets tegen om de gebruikelijke inrichting voor deze kleine tafel te behouden.

Op de volgende punten zouden wij gaarne de aandacht van de leraren willen vestigen.

**1**). De bekende sterretjes, die voorkomen in een tafel met vijf decimalen, zijn hierin niet nodig; er is immers ruimte genoeg op een regel om daar, waar men verandering heeft in het tweede cijfer van de mantisse, de eerste twee decimalen af te drukken bij alle getallen op dezelfde regel.

**2**). Een tafel met vier decimalen kan inderdaad in vele gevallen een tafel in vijf decimalen vervangen; maar dan is een eerste eis, dat de vier decimalen ten minste betrouwbaar zijn; daarvoor is opklimming in de logarithmen-sinustafel en in de sinustafel (tafel van de natuurlijke waarden) met 1 minuut beslist nodig. Er behoeft dan niet geïnterpoleerd te worden, zoals bij opklimming met 10′ en 6′; men spaart tijd en moeite en voorkomt tevens de menigvuldige vergissingen, die er het gevolg van zijn. Interpolatie heeft bovendien nog dit tegen, dat de maximale fout verdubbeld wordt. Enige bewerkingen stapelen de fouten toch al gauw op tot een eenheid van de derde decimaal of meer; veel groter wordt de fout, als de getallen, waarmee men begint te rekenen, geïnterpoleerde waarden zijn.

**3**). Voor $\log \sin \alpha$ en $\log \operatorname{tg} \alpha$ van hoeken tot **3°** zijn extra voorzieningen getroffen; deze waarden (in tafels met meer decimalen tot 2°) eisen steeds bijzondere zorg wegens de grote differenties, die daarin optreden.

4). Ook de natuurlijke waarden van blz. 57—79 geven we met opklimming van 1 minuut; dit is alleszins voldoende. Men zou zich bij de tangenten van hoeken van 45°—85° tot 3 decimalen kunnen beperken, daarboven tot minder dan 3; we hebben dat niet gedaan, teneinde de leerlingen niet voor nieuwe moeilijkheden te plaatsen. Grondige kennis van benaderde waarden en de bewerkingen er mee mogen we niet eisen; dat volgens het nieuwe leerplan er althans iets aan moet worden gedaan, is al een grote vooruitgang.

5). De logarithmen-sinustafel en de sinustafel hebben we gegeven in de gebruikelijke vorm, nl. met de vier functies naast elkaar; deze algemeen gevolgde vorm is verreweg de beste; als men dan bovendien, zoals in deze kleine tafel, 4 volle graden naast elkaar overziet, wordt het bladeren tot een minimum beperkt; met het interpoleren houdt dat nl. het meest op. Het ontbreken van sterretjes, die op volgende begincijfers wijzen, het weglaten van lange reeksen gelijke cijfers, waardoor de eindcijfers beter in het oog springen, draagt mede niet weinig bij tot een gemakkelijk gebruik.

6). De bijtafels van de blz. 82—88 zal men in vele gevallen met vrucht kunnen gebruiken. Al wordt de samengestelde intrestrekening in het leerplan niet meer genoemd, dat neemt niet weg, dat nog wel iets er van bij de meetkundige reeksen zal overblijven.

Daar berekeningen met logarithmen in vier decimalen daarvoor niet nauwkeurig genoeg zijn, bovendien onnodig bewerkelijk, zal het dan aanbeveling verdienen gebruik te maken van de rentetafels van blz. 82—85. Deze zijn in 6 decimalen, hetgeen in de meeste gevallen voldoende is; voor een kapitaal K tot *f* 10000 zijn dan immers $(1 + i)^n$ K en $(1 + i)^{-n}$ K nog nauwkeurig op een cent. Beter is het echter, als men naast deze tafel in 4 decimalen Rentetafel D neemt (zie hiernaast, ook voor tafel G); deze geeft ook de sommen van de getallen van blz. 82 en 83 eveneens van blz. 84 en 85 en de annuïteitentafel. Voor de lessen in financiële rekenkunde, die voor de A-afdeling in het leerplan genoemd worden, heeft men nodig Tafel G van Wijdenes en Van de Vliet.

Amsterdam, Aug. 1938 P. WIJDENES.
Jac. Obrechtstraat 88.

P. WIJDENES

1 **RENTETAFEL D.** Deze bevat de Rentetafels I, II, III, IV en V hieronder genoemd met **50** termijnen in 8 decimalen, voor de percenten 2, 2½, 3, 3½, 4, 4½, 5, 5½ en 6.

24 blz. *f* 0.50, . . . . . . . . . . . . gecart. *f* 0.75

P. WIJDENES en Dr. P. G. VAN DE VLIET

2 **LOGARITHMEN-, RENTE- EN DISCONTOTAFELS — TAFEL E.**

2de druk — **147** bladzijden — met hulpboekje, gecartonneerd . . . . . . . . . . . . . . . . . . *f* 3.25

Hulpboekje afzonderlijk . . . . . . . . . . . . . . . *f* 0.50

**INHOUD**

De logarithmen der getallen van 1—10800 in 5 dec.

*Rentetafels* I $(1 + i)^n$; II $(1 + i)^{-n}$;

III $(1 + i) + (1 + i)^2 + \dots$

IV $(1 + i)^{-1} + (1 + i)^{-2} + \dots$

V Annuïteitentafel met achterafbetaling van de rente.

Zie onderaan.

*Discontotafels*

VI $(1 - d)^n$; VII $(1 - d)^{-n}$;

VIII $(1 - d) + (1 - d)^2 + \dots$

IX $(1 - d)^{-1} + (1 - d)^{-2} + \dots$

X Annuïteitentafel met vooruitbetaling van de rente.

*Bijtafels*

XI $\sqrt[12]{(1 + i)^k}$.

XII Herleiding van dagen tot decimale gedeelten van een jaar en omgekeerd.

Tafel I en II voor de volgende percenten:

¼, ½, ¾, 1, 1¼, 1½, 1¾, 2, 2¼, 2½, 2¾, 3, 3¼, 3½, 3¾, 4, 4¼, 4½, 4¾, 5, 5¼, 5½, 5¾, 6, 6¼, 6½, 6¾, 7, 7¼, 7½, 7¾ en 8.

Tafel III—XI voor deze percenten:

½, 1, 1½, 2, 2½, 3, 3½, 4, 4½, 5, 5½, 6, 6½, 7, 7½ en 8.

Tafel I—X met 100 termijnen in 8 decimalen.

---

☛ Op verzoek is een beknopte uitgave van Tafel E gemaakt onder de titel

P. WIJDENES en Dr. P. G. VAN DE VLIET

3 **LOGARITHMEN- EN RENTETAFEL G.**

In deze tafel ontbreken de discontotafels.

95 blz., groot formaat, in slap linnen . . . . *f* 1.60

Pres.-ex. van Tafel G aanvragen bij den uitgever.

| N | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Mantisse of decimaal gedeelte van de logarithme. | | | | | | | | | |
| **50** | 6990 | 6998 | 7007 | 7016 | 7024 | 7033 | 7042 | 7050 | 7059 | 7067 |
| 51 | 7076 | 7084 | 7093 | 7101 | 7110 | 7118 | 7126 | 7135 | 7143 | 7152 |
| 52 | 7160 | 7168 | 7177 | 7185 | 7193 | 7202 | 7210 | 7218 | 7226 | 7235 |
| 53 | 7243 | 7251 | 7259 | 7267 | 7275 | 7284 | 7292 | 7300 | 7308 | 7316 |
| 54 | 7324 | 7332 | 7340 | 7348 | 7356 | 7364 | 7372 | 7380 | 7388 | 7396 |
| 55 | 7404 | 7412 | 7419 | 7427 | 7435 | 7443 | 7451 | 7459 | 7466 | 7474 |
| 56 | 7482 | 7490 | 7497 | 7505 | 7513 | 7520 | 7528 | 7536 | 7543 | 7551 |
| 57 | 7559 | 7566 | 7574 | 7582 | 7589 | 7597 | 7604 | 7612 | 7619 | 7627 |
| 58 | 7634 | 7642 | 7649 | 7657 | 7664 | 7672 | 7679 | 7686 | 7694 | 7701 |
| 59 | 7709 | 7716 | 7723 | 7731 | 7738 | 7745 | 7752 | 7760 | 7767 | 7774 |
| **60** | 7782 | 7789 | 7796 | 7803 | 7810 | 7818 | 7825 | 7832 | 7839 | 7846 |
| 61 | 7853 | 7860 | 7868 | 7875 | 7882 | 7889 | 7896 | 7903 | 7910 | 7917 |
| 62 | 7924 | 7931 | 7938 | 7945 | 7952 | 7959 | 7966 | 7973 | 7980 | 7987 |
| 63 | 7993 | 8000 | 8007 | 8014 | 8021 | 8028 | 8035 | 8041 | 8048 | 8055 |
| 64 | 8062 | 8069 | 8075 | 8082 | 8089 | 8096 | 8102 | 8109 | 8116 | 8122 |
| 65 | 8129 | 8136 | 8142 | 8149 | 8156 | 8162 | 8169 | 8176 | 8182 | 8189 |
| 66 | 8195 | 8202 | 8209 | 8215 | 8222 | 8228 | 8235 | 8241 | 8248 | 8254 |
| 67 | 8261 | 8267 | 8274 | 8280 | 8287 | 8293 | 8299 | 8306 | 8312 | 8319 |
| 68 | 8325 | 8331 | 8338 | 8344 | 8351 | 8357 | 8363 | 8370 | 8376 | 8382 |
| 69 | 8388 | 8395 | 8401 | 8407 | 8414 | 8420 | 8426 | 8432 | 8439 | 8445 |
| **70** | 8451 | 8457 | 8463 | 8470 | 8476 | 8482 | 8488 | 8494 | 8500 | 8506 |
| 71 | 8513 | 8519 | 8525 | 8531 | 8537 | 8543 | 8549 | 8555 | 8561 | 8567 |
| 72 | 8573 | 8579 | 8585 | 8591 | 8597 | 8603 | 8609 | 8615 | 8621 | 8627 |
| 73 | 8633 | 8639 | 8645 | 8651 | 8657 | 8663 | 8669 | 8675 | 8681 | 8686 |
| 74 | 8692 | 8698 | 8704 | 8710 | 8716 | 8722 | 8727 | 8733 | 8739 | 8745 |
| 75 | 8751 | 8756 | 8762 | 8768 | 8774 | 8779 | 8785 | 8791 | 8797 | 8802 |
| 76 | 8808 | 8814 | 8820 | 8825 | 8831 | 8837 | 8842 | 8848 | 8854 | 8859 |
| 77 | 8865 | 8871 | 8876 | 8882 | 8887 | 8893 | 8899 | 8904 | 8910 | 8915 |
| 78 | 8921 | 8927 | 8932 | 8938 | 8943 | 8949 | 8954 | 8960 | 8965 | 8971 |
| 79 | 8976 | 8982 | 8987 | 8993 | 8998 | 9004 | 9009 | 9015 | 9020 | 9025 |
| **80** | 9031 | 9036 | 9042 | 9047 | 9053 | 9058 | 9063 | 9069 | 9074 | 9079 |
| 81 | 9085 | 9090 | 9096 | 9101 | 9106 | 9112 | 9117 | 9122 | 9128 | 9133 |
| 82 | 9138 | 9143 | 9149 | 9154 | 9159 | 9165 | 9170 | 9175 | 9180 | 9186 |
| 83 | 9191 | 9196 | 9201 | 9206 | 9212 | 9217 | 9222 | 9227 | 9232 | 9238 |
| 84 | 9243 | 9248 | 9253 | 9258 | 9263 | 9269 | 9274 | 9279 | 9284 | 9289 |
| 85 | 9294 | 9299 | 9304 | 9309 | 9315 | 9320 | 9325 | 9330 | 9335 | 9340 |
| 86 | 9345 | 9350 | 9355 | 9360 | 9365 | 9370 | 9375 | 9380 | 9385 | 9390 |
| 87 | 9395 | 9400 | 9405 | 9410 | 9415 | 9420 | 9425 | 9430 | 9435 | 9440 |
| 88 | 9445 | 9450 | 9455 | 9460 | 9465 | 9469 | 9474 | 9479 | 9484 | 9489 |
| 89 | 9494 | 9499 | 9504 | 9509 | 9513 | 9518 | 9523 | 9528 | 9533 | 9538 |
| **90** | 9542 | 9547 | 9552 | 9557 | 9562 | 9566 | 9571 | 9576 | 9581 | 9586 |
| 91 | 9590 | 9595 | 9600 | 9605 | 9609 | 9614 | 9619 | 9624 | 9628 | 9633 |
| 92 | 9638 | 9643 | 9647 | 9652 | 9657 | 9661 | 9666 | 9671 | 9675 | 9680 |
| 93 | 9685 | 9689 | 9694 | 9699 | 9703 | 9708 | 9713 | 9717 | 9722 | 9727 |
| 94 | 9731 | 9736 | 9741 | 9745 | 9750 | 9754 | 9759 | 9763 | 9768 | 9773 |
| 95 | 9777 | 9782 | 9786 | 9791 | 9795 | 9800 | 9805 | 9809 | 9814 | 9818 |
| 96 | 9823 | 9827 | 9832 | 9836 | 9841 | 9845 | 9850 | 9854 | 9859 | 9863 |
| 97 | 9868 | 9872 | 9877 | 9881 | 9886 | 9890 | 9894 | 9899 | 9903 | 9908 |
| 98 | 9912 | 9917 | 9921 | 9926 | 9930 | 9934 | 9939 | 9943 | 9948 | 9952 |
| 99 | 9956 | 9961 | 9965 | 9969 | 9974 | 9978 | 9983 | 9987 | 9991 | 9996 |
| **100** | 0000 | 0004 | 0009 | 0013 | 0017 | 0022 | 0026 | 0030 | 0035 | 0039 |
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |



Deze bladzijde slechts te gebruiken voor het opzoeken van logarithmen van getallen van hoogstens drie cijfers.

18°

| M | log sin | log tg | log cotg | log cos | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 9,4900 | 9,5118 | 10,4882 | 9,9782 | 60 |
| 1 | 04 | 22 | 78 | 82 | 59 |
| 2 | 08 | 26 | 74 | 81 | 58 |
| 3 | 11 | 31 | 69 | 81 | 57 |
| 4 | 15 | 35 | 65 | 80 | 56 |
| 5 | 19 | 39 | 61 | 80 | 55 |
| 6 | 23 | 43 | 57 | 80 | 54 |
| 7 | 27 | 48 | 52 | 79 | 53 |
| 8 | 31 | 52 | 48 | 79 | 52 |
| 9 | 35 | 56 | 44 | 78 | 51 |
| 10 | 9,4939 | 9,5161 | 10,4839 | 9,9778 | 50 |
| 11 | 42 | 65 | 35 | 78 | 49 |
| 12 | 46 | 69 | 31 | 77 | 48 |
| 13 | 50 | 73 | 27 | 77 | 47 |
| 14 | 54 | 78 | 22 | 76 | 46 |
| 15 | 58 | 82 | 18 | 76 | 45 |
| 16 | 62 | 86 | 14 | 75 | 44 |
| 17 | 65 | 90 | 10 | 75 | 43 |
| 18 | 69 | 95 | 05 | 75 | 42 |
| 19 | 73 | 9,5199 | 10,4801 | 74 | 41 |
| 20 | 9,4977 | 9,5203 | 10,4797 | 9,9774 | 40 |
| 21 | 81 | 07 | 93 | 73 | 39 |
| 22 | 84 | 12 | 88 | 73 | 38 |
| 23 | 88 | 16 | 84 | 73 | 37 |
| 24 | 92 | 20 | 80 | 72 | 36 |
| 25 | 9,4996 | 24 | 76 | 72 | 35 |
| 26 | 9,5000 | 28 | 72 | 71 | 34 |
| 27 | 03 | 33 | 67 | 71 | 33 |
| 28 | 07 | 37 | 63 | 70 | 32 |
| 29 | 11 | 41 | 59 | 70 | 31 |
| 30 | 9,5015 | 9,5245 | 10,4755 | 9,9770 | 30 |
| 31 | 19 | 49 | 51 | 69 | 29 |
| 32 | 22 | 54 | 46 | 69 | 28 |
| 33 | 26 | 58 | 42 | 68 | 27 |
| 34 | 30 | 62 | 38 | 68 | 26 |
| 35 | 34 | 66 | 34 | 67 | 25 |
| 36 | 37 | 70 | 30 | 67 | 24 |
| 37 | 41 | 75 | 25 | 67 | 23 |
| 38 | 45 | 79 | 21 | 66 | 22 |
| 39 | 49 | 83 | 17 | 66 | 21 |
| 40 | 9,5052 | 9,5287 | 10,4713 | 9,9765 | 20 |
| 41 | 56 | 91 | 09 | 65 | 19 |
| 42 | 60 | 9,5295 | 05 | 64 | 18 |
| 43 | 64 | 9,5300 | 10,4700 | 64 | 17 |
| 44 | 67 | 04 | 10,4696 | 64 | 16 |
| 45 | 71 | 08 | 92 | 63 | 15 |
| 46 | 75 | 12 | 88 | 63 | 14 |
| 47 | 78 | 16 | 84 | 62 | 13 |
| 48 | 82 | 20 | 80 | 62 | 12 |
| 49 | 86 | 24 | 76 | 61 | 11 |
| 50 | 9,5090 | 9,5329 | 10,4671 | 9,9761 | 10 |
| 51 | 93 | 33 | 67 | 61 | 9 |
| 52 | 9,5097 | 37 | 63 | 60 | 8 |
| 53 | 9,5101 | 41 | 59 | 60 | 7 |
| 54 | 04 | 45 | 55 | 59 | 6 |
| 55 | 08 | 49 | 51 | 59 | 5 |
| 56 | 12 | 53 | 47 | 58 | 4 |
| 57 | 15 | 57 | 43 | 58 | 3 |
| 58 | 19 | 62 | 38 | 58 | 2 |
| 59 | 23 | 66 | 34 | 57 | 1 |
| 60 | 9,5126 | 9,5370 | 10,4630 | 9,9757 | 0 |
| | log cos | log cotg | log tg | log sin | M |

71°

19°

| M | log sin | log tg | log cotg | log cos | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 9,5126 | 9,5370 | 10,4630 | 9,9757 | 60 |
| 1 | 30 | 74 | 26 | 56 | 59 |
| 2 | 34 | 78 | 22 | 56 | 58 |
| 3 | 37 | 82 | 18 | 55 | 57 |
| 4 | 41 | 86 | 14 | 55 | 56 |
| 5 | 45 | 90 | 10 | 55 | 55 |
| 6 | 48 | 94 | 06 | 54 | 54 |
| 7 | 52 | 9,5398 | 10,4602 | 54 | 53 |
| 8 | 56 | 9,5402 | 10,4598 | 53 | 52 |
| 9 | 59 | 07 | 93 | 53 | 51 |
| 10 | 9,5163 | 9,5411 | 10,4589 | 9,9752 | 50 |
| 11 | 67 | 15 | 85 | 52 | 49 |
| 12 | 70 | 19 | 81 | 51 | 48 |
| 13 | 74 | 23 | 77 | 51 | 47 |
| 14 | 77 | 27 | 73 | 51 | 46 |
| 15 | 81 | 31 | 69 | 50 | 45 |
| 16 | 85 | 35 | 65 | 50 | 44 |
| 17 | 88 | 39 | 61 | 49 | 43 |
| 18 | 92 | 43 | 57 | 49 | 42 |
| 19 | 96 | 47 | 53 | 48 | 41 |
| 20 | 9,5199 | 9,5451 | 10,4549 | 9,9748 | 40 |
| 21 | 9,5203 | 55 | 45 | 47 | 39 |
| 22 | 06 | 59 | 41 | 47 | 38 |
| 23 | 10 | 63 | 37 | 47 | 37 |
| 24 | 13 | 67 | 33 | 46 | 36 |
| 25 | 17 | 71 | 29 | 46 | 35 |
| 26 | 21 | 75 | 25 | 45 | 34 |
| 27 | 24 | 79 | 21 | 45 | 33 |
| 28 | 28 | 83 | 17 | 44 | 32 |
| 29 | 31 | 87 | 13 | 44 | 31 |
| 30 | 9,5235 | 9,5491 | 10,4509 | 9,9743 | 30 |
| 31 | 39 | 9,5496 | 04 | 43 | 29 |
| 32 | 42 | 9,5500 | 10,4500 | 43 | 28 |
| 33 | 46 | 04 | 10,4496 | 42 | 27 |
| 34 | 49 | 08 | 92 | 42 | 26 |
| 35 | 53 | 12 | 88 | 41 | 25 |
| 36 | 56 | 16 | 84 | 41 | 24 |
| 37 | 60 | 20 | 80 | 40 | 23 |
| 38 | 63 | 24 | 76 | 40 | 22 |
| 39 | 67 | 28 | 72 | 39 | 21 |
| 40 | 9,5270 | 9,5531 | 10,4469 | 9,9739 | 20 |
| 41 | 74 | 35 | 65 | 39 | 19 |
| 42 | 78 | 39 | 61 | 38 | 18 |
| 43 | 81 | 43 | 57 | 38 | 17 |
| 44 | 85 | 47 | 53 | 37 | 16 |
| 45 | 88 | 51 | 49 | 37 | 15 |
| 46 | 92 | 55 | 45 | 36 | 14 |
| 47 | 95 | 59 | 41 | 36 | 13 |
| 48 | 9,5299 | 63 | 37 | 35 | 12 |
| 49 | 9,5302 | 67 | 33 | 35 | 11 |
| 50 | 9,5306 | 9,5571 | 10,4429 | 9,9734 | 10 |
| 51 | 09 | 75 | 25 | 34 | 9 |
| 52 | 13 | 79 | 21 | 34 | 8 |
| 53 | 16 | 83 | 17 | 33 | 7 |
| 54 | 20 | 87 | 13 | 33 | 6 |
| 55 | 23 | 91 | 09 | 32 | 5 |
| 56 | 27 | 95 | 05 | 32 | 4 |
| 57 | 30 | 9,5599 | 10,4401 | 31 | 3 |
| 58 | 34 | 9,5603 | 10,4397 | 31 | 2 |
| 59 | 37 | 07 | 93 | 30 | 1 |
| 60 | 9,5341 | 9,5611 | 10,4389 | 9,9730 | 0 |
| | log cos | log cotg | log tg | log sin | M |

70°

# 1°

| M | Sin | Tg | Cotg | Cos | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,0175 | 0,0175 | 57,2900 | 0,9998 | 60 |
| 1 | 77 | 77 | 56,3506 | 98 | 59 |
| 2 | 80 | 80 | 55,4415 | 98 | 58 |
| 3 | 83 | 83 | 54,5613 | 98 | 57 |
| 4 | 86 | 86 | 53,7086 | 98 | 56 |
| **5** | 89 | 89 | 52,8821 | 98 | **55** |
| 6 | 92 | 92 | 52,0807 | 98 | 54 |
| 7 | 95 | 95 | 51,3032 | 98 | 53 |
| 8 | 0,0198 | 0,0198 | 50,5485 | 98 | 52 |
| 9 | 0,0201 | 0,0201 | 49,8157 | 98 | 51 |
| **10** | 0,0204 | 0,0204 | 49,1039 | 0,9998 | **50** |
| 11 | 07 | 07 | 48,4121 | 98 | 49 |
| 12 | 09 | 09 | 47,7395 | 98 | 48 |
| 13 | 12 | 12 | 47,0853 | 98 | 47 |
| 14 | 15 | 15 | 46,4489 | 98 | 46 |
| **15** | 18 | 18 | 45,8294 | 98 | **45** |
| 16 | 21 | 21 | 45,2261 | 98 | 44 |
| 17 | 24 | 24 | 44,6386 | 97 | 43 |
| 18 | 27 | 27 | 44,0661 | 97 | 42 |
| 19 | 30 | 30 | 43,5081 | 97 | 41 |
| **20** | 0,0233 | 0,0233 | 42,9641 | 0,9997 | **40** |
| 21 | 36 | 36 | 42,4335 | 97 | 39 |
| 22 | 39 | 39 | 41,9158 | 97 | 38 |
| 23 | 41 | 41 | 41,4106 | 97 | 37 |
| 24 | 44 | 44 | 40,9174 | 97 | 36 |
| **25** | 47 | 47 | 40,4358 | 97 | **35** |
| 26 | 50 | 50 | 39,9655 | 97 | 34 |
| 27 | 53 | 53 | 39,5059 | 97 | 33 |
| 28 | 56 | 56 | 39,0568 | 97 | 32 |
| 29 | 59 | 59 | 38,6177 | 97 | 31 |
| **30** | 0,0262 | 0,0262 | 38,1885 | 0,9997 | **30** |
| 31 | 65 | 65 | 37,7686 | 96 | 29 |
| 32 | 68 | 68 | 37,3579 | 96 | 28 |
| 33 | 70 | 71 | 36,9560 | 96 | 27 |
| 34 | 73 | 74 | 36,5627 | 96 | 26 |
| **35** | 76 | 76 | 36,1776 | 96 | **25** |
| 36 | 79 | 79 | 35,8006 | 96 | 24 |
| 37 | 82 | 82 | 35,4313 | 96 | 23 |
| 38 | 85 | 85 | 35,0695 | 96 | 22 |
| 39 | 88 | 88 | 34,7151 | 96 | 21 |
| **40** | 0,0291 | 0,0291 | 34,3678 | 0,9996 | **20** |
| 41 | 94 | 94 | 34,0273 | 96 | 19 |
| 42 | 0,0297 | 0,0297 | 33,6935 | 96 | 18 |
| 43 | 0,0300 | 0,0300 | 33,3662 | 96 | 17 |
| 44 | 02 | 03 | 33,0452 | 95 | 16 |
| **45** | 05 | 06 | 32,7303 | 95 | **15** |
| 46 | 08 | 08 | 32,4213 | 95 | 14 |
| 47 | 11 | 11 | 32,1181 | 95 | 13 |
| 48 | 14 | 14 | 31,8205 | 95 | 12 |
| 49 | 17 | 17 | 31,5284 | 95 | 11 |
| **50** | 0,0320 | 0,0320 | 31,2416 | 0,9995 | **10** |
| 51 | 23 | 23 | 30,9599 | 95 | 9 |
| 52 | 26 | 26 | 30,6833 | 95 | 8 |
| 53 | 29 | 29 | 30,4116 | 95 | 7 |
| 54 | 32 | 32 | 30,1446 | 95 | 6 |
| **55** | 34 | 35 | 29,8823 | 94 | **5** |
| 56 | 37 | 38 | 29,6245 | 94 | 4 |
| 57 | 40 | 40 | 29,3711 | 94 | 3 |
| 58 | 43 | 43 | 29,1220 | 94 | 2 |
| 59 | 46 | 46 | 28,8771 | 94 | 1 |
| **60** | 0,0349 | 0,0349 | 28,6363 | 0,9994 | **0** |
| | Cos | Cotg | Tg | Sin | M |

**88°**

# 2°

| M | Sin | Tg | Cotg | Cos | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,0349 | 0,0349 | 28,6363 | 0,9994 | 60 |
| 1 | 52 | 52 | 28,3994 | 94 | 59 |
| 2 | 55 | 55 | 28,1664 | 94 | 58 |
| 3 | 58 | 58 | 27,9372 | 94 | 57 |
| 4 | 61 | 61 | 27,7117 | 93 | 56 |
| **5** | 64 | 64 | 27,4899 | 93 | **55** |
| 6 | 66 | 67 | 27,2715 | 93 | 54 |
| 7 | 69 | 70 | 27,0566 | 93 | 53 |
| 8 | 72 | 73 | 26,8450 | 93 | 52 |
| 9 | 75 | 75 | 26,6367 | 93 | 51 |
| **10** | 0,0378 | 0,0378 | 26,4316 | 0,9993 | **50** |
| 11 | 81 | 81 | 26,2296 | 93 | 49 |
| 12 | 84 | 84 | 26,0307 | 93 | 48 |
| 13 | 87 | 87 | 25,8348 | 93 | 47 |
| 14 | 90 | 90 | 25,6418 | 92 | 46 |
| **15** | 93 | 93 | 25,4517 | 92 | **45** |
| 16 | 96 | 96 | 25,2644 | 92 | 44 |
| 17 | 0,0398 | 0,0399 | 25,0798 | 92 | 43 |
| 18 | 0,0401 | 0,0402 | 24,8978 | 92 | 42 |
| 19 | 04 | 05 | 24,7185 | 92 | 41 |
| **20** | 0,0407 | 0,0407 | 24,5418 | 0,9992 | **40** |
| 21 | 10 | 10 | 24,3675 | 92 | 39 |
| 22 | 13 | 13 | 24,1957 | 91 | 38 |
| 23 | 16 | 16 | 24,0263 | 91 | 37 |
| 24 | 19 | 19 | 23,8593 | 91 | 36 |
| **25** | 22 | 22 | 23,6945 | 91 | **35** |
| 26 | 25 | 25 | 23,5321 | 91 | 34 |
| 27 | 27 | 28 | 23,3718 | 91 | 33 |
| 28 | 30 | 31 | 23,2137 | 91 | 32 |
| 29 | 33 | 34 | 23,0577 | 91 | 31 |
| **30** | 0,0436 | 0,0437 | 22,9038 | 0,9990 | **30** |
| 31 | 39 | 40 | 22,7519 | 90 | 29 |
| 32 | 42 | 42 | 22,6020 | 90 | 28 |
| 33 | 45 | 45 | 22,4541 | 90 | 27 |
| 34 | 48 | 48 | 22,3081 | 90 | 26 |
| **35** | 51 | 51 | 22,1640 | 90 | **25** |
| 36 | 54 | 54 | 22,0217 | 90 | 24 |
| 37 | 57 | 57 | 21,8813 | 90 | 23 |
| 38 | 59 | 60 | 21,7426 | 89 | 22 |
| 39 | 62 | 63 | 21,6056 | 89 | 21 |
| **40** | 0,0465 | 0,0466 | 21,4704 | 0,9989 | **20** |
| 41 | 68 | 69 | 21,3369 | 89 | 19 |
| 42 | 71 | 72 | 21,2049 | 89 | 18 |
| 43 | 74 | 75 | 21,0747 | 89 | 17 |
| 44 | 77 | 77 | 20,9460 | 89 | 16 |
| **45** | 80 | 80 | 20,8188 | 88 | **15** |
| 46 | 83 | 83 | 20,6932 | 88 | 14 |
| 47 | 86 | 86 | 20,5691 | 88 | 13 |
| 48 | 88 | 89 | 20,4465 | 88 | 12 |
| 49 | 91 | 92 | 20,3253 | 88 | 11 |
| **50** | 0,0494 | 0,0495 | 20,2056 | 0,9988 | **10** |
| 51 | 0,0497 | 0,0498 | 20,0872 | 88 | 9 |
| 52 | 0,0500 | 0,0501 | 19,9702 | 87 | 8 |
| 53 | 03 | 04 | 19,8546 | 87 | 7 |
| 54 | 06 | 07 | 19,7403 | 87 | 6 |
| **55** | 09 | 09 | 19,6273 | 87 | **5** |
| 56 | 12 | 12 | 19,5156 | 87 | 4 |
| 57 | 15 | 15 | 19,4051 | 87 | 3 |
| 58 | 18 | 18 | 19,2959 | 87 | 2 |
| 59 | 20 | 21 | 19,1879 | 86 | 1 |
| **60** | 0,0523 | 0,0524 | 19,0811 | 0,9986 | **0** |
| | Cos | Cotg | Tg | Sin | M |

**87°**

☞ Evenredige interpolatie geeft voor de **cotg** tot 2° waarden, nauwkeurig in 2 decimalen; van 2° tot 5°30′ in 3 decimalen.

compressiemethode III; 8, 21). Zij de oppervlakte van den cirkel $K$, van den bedoelden rechthoekigen driehoek $\Delta$, van het in resp. om den cirkel beschreven regelmatig polygoon met $n$ zijden $I_n$, resp. $C_n$.

Zij nu $K > \Delta$. Men kan dan blijkens de redeneering van Euclides XII, 2 [4]) (d.w.z. op grond van het postulaat van Eudoxos), $n$ zoo bepalen, dat

$$K - I_n < K - \Delta$$

dus
$$I_n > \Delta$$

Echter is $I_n$ gelijk aan de oppervlakte van een rechthoekigen driehoek, waarvan de rechthoekszijden opv. gelijk zijn aan apothema en omtrek van het in den cirkel beschreven regelmatig polygoon met $n$ zijden; deze zijn opv. kleiner dan de straal en de omtrek van den cirkel, dus kleiner dan de overeenkomstige zijden van den driehoek met oppervlakte $\Delta$. Hieruit volgt

$$I_n < \Delta$$

in strijd met de onderstelling.

Zij ten tweede $K < \Delta$. Men ziet nu op dezelfde wijze als zoojuist in, dat er een getal $n$ bestaat, zoodat

$$C_n - K < \Delta - K$$

dus
$$C_n < \Delta$$

Hierin is $C_n$ gelijk aan de oppervlakte van een rechthoekigen driehoek, waarvan de rechthoekszijden opv. gelijk zijn aan den straal van den cirkel en den omtrek van het regelmatig omgeschreven polygoon met $n$ zijden, d.w.z. opv. gelijk aan en grooter dan de overeenkomstige zijden van den driehoek met oppervlakte $\Delta$. Hieruit volgt

$$C_n > \Delta$$

in strijd met de onderstelling. De eenige mogelijkheid is dus

$$K = \Delta$$

De nu volgende Prop. 2 steunt op Prop. 3; we vermelden haar dus na deze.

P r o p o s i t i e 3.

*Van elken cirkel is de omtrek het drievoud van den diameter en*

---

[4]) *Elementen van Euclides* II, 225. Verg. **S. C.** I, 6.

*hij overtreft hem nog met minder dan het zevende deel van den diameter en met meer dan tien eenenzeventigste deelen.*

Dus

$$(3 + \tfrac{10}{71}) \text{ Diameter} < \text{Omtrek} < (3 + \tfrac{1}{7}) \text{ Diameter}.$$

De bovenste grens is de bekende Archimedische benadering $\pi \sim \frac{22}{7}$.

Om het betoog van Archimedes zooveel mogelijk van nabij te kunnen volgen, schetsen we eerst de groote lijn van het bewijs en geven daarna de resultaten der berekening in Grieksche symbolen, verduidelijkt door een Indo-Arabische transcriptie.

In het eerste deel van de propositie wordt een bovenste grens voor de gevraagde verhouding afgeleid.

Zij (fig. 91) $A\Gamma$ de diameter van een cirkel met centrum $E$, $\Gamma Z$ de raaklijn in $\Gamma$, $\angle ZE\Gamma$ het derde deel van een rechten hoek. Dan weet men de verhouding $(EZ, \Gamma Z)$, nl. 2 : 1, terwijl voor $(E\Gamma, \Gamma Z)$, d.i. in onze notatie $\sqrt{3} : 1$, een rationale benadering aan den lagen kant $\frac{265}{153}$ bekend blijkt te zijn. Snijdt nu de bissectrix van $\angle ZE\Gamma$ de lijn $\Gamma Z$ in $H$, dan geldt

$$(ZE, \Gamma E) = (ZH, \Gamma H)$$

waaruit *componendo* en *permutando* volgt

$$(ZE + E\Gamma, \Gamma Z) = (\Gamma E, \Gamma H)$$

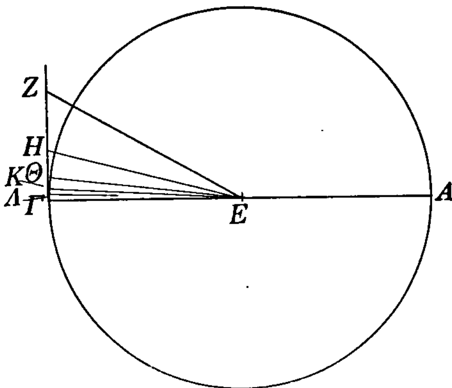


Fig. 91.

Men kent dus een benaderde waarde voor $(\Gamma E, \Gamma H)$, dus voor $[\mathbf{T}(\Gamma E), \mathbf{T}(\Gamma H)]$, dus *componendo* voor $[\mathbf{T}(HE), \mathbf{T}(\Gamma H)]$ en men vindt daaruit een benaderde waarde voor de verhouding $(HE, \Gamma H)$. Het is duidelijk, dat men door de kennis van de verhoudingen $(EH, \Gamma H)$ en $(E\Gamma, \Gamma H)$ weer op eenzelfde standpunt is gekomen, als toen men aanvankelijk de verhoudingen $(EZ, \Gamma Z)$ en $(E\Gamma, \Gamma Z)$ kende.

Stelt nu $Z_n$ de zijde van den omgeschreven regelmatigen $n$-hoek voor, dan is

$$(E\Gamma,\ Z\Gamma) = (R, \tfrac{1}{2}Z_6)$$
$$(E\Gamma,\ H\Gamma) = (R, \tfrac{1}{2}Z_{12})$$

en men moet dus, zoo voortgaande, tenslotte een benadering voor de verhouding $(R,\ \frac{1}{2}\ Z_{96})$ vinden en dus ook voor de verhouding van den omtrek van den regelmatigen omgeschreven 96-hoek tot $R$; daaruit volgt dan echter een bovenste grens voor de verhouding van cirkelomtrek tot diameter.

In moderne symbolen komt de methode neer op herhaalde toepassing van de formule

$$Z_{2n} = \frac{RZ_n}{R + \sqrt{R^2 + \frac{1}{4}\,Z_n^{\,2}}}.$$

Gaan we nu na, hoe Archimedes de berekening uitvoert. Zonder toelichting stelt hij

$$(E\Gamma,\ \Gamma Z) = (\overline{\sigma\xi\varepsilon},\ \overline{\varrho\nu\gamma})\ ^{5)} \qquad (265 : 153)$$

en schrijft in verband daarmee

$$(EZ,\ \Gamma Z) = (\overline{\tau\varsigma},\ \overline{\varrho\nu\gamma}) \qquad (306 : 153)$$

Nu wordt dus

$$(\Gamma E,\ \Gamma H) > (\overline{\varphi o\alpha},\ \overline{\varrho\nu\gamma}) \qquad (571 : 153)$$

$$[\mathbf{T}(\Gamma E), \mathbf{T}(\Gamma H)] = (\overset{\lambda\beta}{M}\,\overline{,\varsigma\mu\alpha},\ \overset{\beta}{M}\,\overline{,\gamma\upsilon\vartheta})\ ^{6)} \quad (326041 : 23409)$$

$$[\mathbf{T}(EH),\ \mathbf{T}(\Gamma H)] = (\overset{\lambda\delta}{M}\,\overline{,\vartheta\upsilon\nu},\ \overset{\beta}{M}\,,\gamma\upsilon\vartheta] \quad (349450 : 23409)$$

$$(EH,\ \Gamma H) = (\overline{\varphi\,ϙ\alpha\eta'},\ \overline{\varrho\nu\gamma}) \qquad (591\tfrac{1}{8} : 153)$$

Archimedes onderscheidt in zijn terminologie niet overal tusschen exacte en benaderde gelijkheid. Het betoog heeft echter slechts dan bewijskracht, wanneer men, evenals men is uitgegaan van $(E\Gamma, \Gamma Z) > (\overline{\sigma\xi\varepsilon}, \overline{\varrho\nu\gamma})$ ook weer uitkomt op $(EH,\ \Gamma H) > (\overline{\varphi\,ϙ\alpha\ \eta'}, \overline{\varrho\nu\gamma})$.

Nu is, zooals men gemakkelijk inziet, bij alle vorige omvormingen der evenredigheden het teeken $>$ van kracht gebleven; dit zal bij de ten slotte uitgevoerde vierkantsworteltrekking ook het geval zijn, daar $\overline{\varphi\,ϙ\alpha\ \eta'}$ een afronding aan den lagen kant is.

---

5) De bedoeling blijkt te zijn $(E\Gamma, \Gamma Z) > (\overline{\sigma\xi\varepsilon}, \overline{\varrho\nu\gamma})$. Voor het Grieksche cijfersysteem vergelijke men Hoofdstuk III; 0,6.

6) Deze regel staat niet in den tekst.

We zullen de vraag, hoe Archimedes aan deze benadering komt, nog even laten rusten, om eerst de berekening verder te volgen.

Door herhaalde constructie van bissectrices vindt men na $H$ opv. de deelpunten $\Theta$, $K$, $\Lambda$. Nu bleek boven reeds

$$(EH,\ \Gamma H) = (\overline{\varphi\text{ϙ}\alpha}\ \eta', \overline{\varrho\nu\gamma}) \qquad \text{waarin } \Gamma H = \tfrac{1}{2} Z_{12}.$$

Archimedes vindt verder

$$(E\Gamma,\ \Gamma\Theta) > (\overline{,\alpha\varrho\xi\beta}\ \eta',\ \overline{\varrho\nu\gamma}) \text{ dus } \frac{R}{\frac{1}{2} Z_{24}} > \frac{1162\frac{1}{8}}{153}$$

$$(E\Gamma,\ \Gamma K) > (\overline{,\beta\tau\lambda\delta}\ \delta',\ \overline{\varrho\nu\gamma}) \text{ dus } \frac{R}{\frac{1}{2} Z_{48}} > \frac{2334\frac{1}{4}}{153}$$

$$(E\Gamma,\ \Gamma\Lambda) > (\overline{,\delta\chi o\gamma}\,\text{∟}',\ \overline{\varrho\nu\gamma}) \text{ dus } \frac{R}{\frac{1}{2} Z_{96}} > \frac{4673\frac{1}{2}}{153}.$$

Nu blijkt dus

**(Diameter, Omtrek van den omgeschreven 96-hoek)**

$$> (\overline{,\delta\chi o\gamma}\,\text{∟}',\ \overset{a}{M}\ ,\delta\chi\pi\eta)$$

waarin het laatste getal gevonden is als product van $\overline{\text{ϙ}\varsigma}$ en $\overline{\varrho\nu\gamma}$.

Nu bevat $\overset{a}{M}\overline{,\delta\chi\pi\eta}$ het drievoud van $\overline{,\delta\chi o\gamma}\,\text{∟}'$ met een rest $\overline{\chi\xi\zeta}\,\text{∟}'$, die minder is dan het zevende deel van $\overline{,\delta\chi o\gamma}$. Dus is a fortiori de omtrek van den cirkel kleiner dan het drievoud van den diameter, vermeerderd met zijn zevende deel.

Het laatste deel der berekening verloopt in Indo-Arabische symbolen als volgt:

$$\frac{d}{Z_{96}} > \frac{4673\frac{1}{2}}{153}.$$

dus

$$96 \,.\, Z_{96} < \frac{96 \,.\, 153}{4673\frac{1}{2} . d} < \frac{22}{7}\, d$$

dus a fortiori

$$\text{Omtrek van den cirkel} < \frac{22}{7}\, d.$$

In het tweede deel van de propositie wordt nu door beschouwing van ingeschreven regelmatige polygonen met toenemend aantal zijden een benedenste grens voor de verhouding van omtrek tot diameter afgeleid. Zij (fig. 92) in den cirkel met diameter $A\Gamma$ en

centrum $E\,\overline{\Gamma B}$ de zijde van den ingeschreven regelmatigen zeshoek. Als uitgangspunt wordt nu een rationale benadering van

Fig. 92.

$(AB,\ B\Gamma)$, d.i. van $\sqrt{3} : 1$, aan den hoogen kant $\frac{1351}{780}$ gebruikt. Men kent bovendien $(A\Gamma,\ \Gamma B)$. Snijdt nu de bissectrix van $\angle BA\Gamma$ de zijde $B\Gamma$ in $Z$ en den cirkelboog in $H$, dan volgt uit de gelijkvormigheid der driehoeken $AH\Gamma$ en $\Gamma HZ$

$$(AH,\ \Gamma H) = (A\Gamma,\ \Gamma Z) = (AB,\ BZ) = (A\Gamma + AB,\ B\Gamma)$$

zoodat $(AH,\ \Gamma H)$ bekend is. Hieruit volgt $[\mathbf{T}\,(AH),\ \mathbf{T}\,(\Gamma H)]$, daaruit *componendo* $[\mathbf{T}\,(A\Gamma),\ \mathbf{T}\,(\Gamma H)]$ en daaruit $(A\Gamma,\ \Gamma H)$ Daar men nu $(A\Gamma,\ \Gamma H)$ en $(AH,\ \Gamma H)$ kent, is men ten aanzien van $H\Gamma$ weer op hetzelfde punt gekomen, als waarop men oorspronkelijk ten aanzien van $B\Gamma$ stond.

Stelt nl. $z_n$ de zijde van den ingeschreven regelmatigen $n$-hoek voor, en $d$ den diameter, dan is

$$(A\Gamma,\ \Gamma B) = (d,\ z_6)$$
$$(A\Gamma,\ \Gamma H) = (d,\ z_{12}).$$

Zoo voortgaande vindt men dus ten slotte een benadering voor $(d,\ z_{96})$ en dus voor de verhouding van den omtrek van den ingeschreven regelmatigen 96-hoek tot den diameter; daaruit volgt een onderste grens voor de verhouding van cirkelomtrek en diameter.

Wanneer men de complementaire koorde van $z_n$ door $k_n$ aanduidt $(k_n^2 = d^2 - z_n^2)$, dan komt de methode neer op herhaalde toepassing van de formule

$$\frac{k_{2n}}{z_{2n}} = \frac{d + k_n}{Z_n}$$

waaruit na quadrateeren *componendo* volgt

$$\frac{d^2}{{z_{2n}}^2} = \frac{2d^2 + 2dk_n}{{z_n}^2}.$$ [7])

We vermelden nu de opvolgende resultaten. Zijn de na $H$ opv. verkregen deelpunten $\Theta$, $K$, $\Lambda$, dan was eerst

$$(AB,\ B\Gamma) < (\overline{,\alpha\tau\nu\alpha},\ \overline{\psi\pi}) \qquad (1351 : 780)$$

en

$$(A\Gamma,\ B\Gamma) = (\overline{,\alpha\varphi\xi},\ \overline{\psi\pi}) \qquad (1560 : 780)$$

waaruit

$$(AH,\ H\Gamma) < (\overline{,\beta\ \text{ϡ}\iota\alpha},\ \psi\pi) \qquad (2911 : 780)$$

Men vindt dan

$$(A\Gamma,\ \Gamma H) < (\overline{,\gamma\iota\gamma}\ \text{L}'\delta',\ \psi\pi) \quad \text{dus} \quad \frac{d}{z_{12}} < \frac{3013\frac{3}{4}}{780}$$

$$(A\Gamma,\ \Gamma\Theta) < (\overline{,\alpha\omega\lambda\eta}\ \overline{\vartheta}\ \iota\alpha',\ \overline{\sigma\mu}) \quad \text{dus} \quad \frac{d}{z_{24}} < \frac{1838\frac{9}{11}}{240}$$

$$(A\Gamma,\ \Gamma K) < (\overline{,\alpha\vartheta}\ \varsigma',\ \overline{\xi\varsigma}) \quad \text{dus} \quad \frac{d}{z_{48}} < \frac{1009\frac{1}{6}}{66}$$

$$(A\Gamma,\ \Gamma\Lambda) < (\overline{,\beta\iota\zeta}\ \delta',\ \overline{\xi\varsigma}) \quad \text{dus} \quad \frac{d}{z_{96}} < \frac{2017\frac{1}{4}}{66}$$

dus

$$(\Gamma\Lambda,\ A\Gamma) > (\overline{\xi\varsigma},\ \overline{,\beta\iota\zeta}\ \delta') \quad \text{of} \quad \frac{z_{96}}{d} > \frac{66}{2017\frac{1}{4}}.$$

---

[7]) Men zou voor de beide door Archimedes gevolgde methoden een enkele in de plaats kunnen zetten door de geldigheid aan te toonen van de volgende betrekkingen:

$$Z_{2n} = \frac{z_n Z_n}{z_n + Z_n} \qquad Z_{2n} = \frac{2{z_{2n}}^2}{z_n}$$

Noemt men de omtrekken van om- resp. ingeschreven polygonen met $n$ zijden resp. $P_n$ en $p_n$, dan volgt hieruit

$$P_{2n} = \frac{2p_n P_n}{p_n + P_n} \qquad p_{2n} = \sqrt{p_n P_{2n}}$$

Deze formules drukken uit, dat in de rij

$$P_n,\ p_n,\ P_{2n},\ p_{2n},\ P_{4n},\ p_{4n} \text{ enz.}$$

van den 3en term af elke term $P_{2i}$ harmonisch gemiddelde en elke term $p_{2i}$ geometrisch gemiddelde is van de voorafgaande twee. Door nu, uitgaande van $P_6$ en $p_6$ achtereenvolgens de termen van deze reeks te berekenen, komt men tot de waarden van $P_{96}$ en $p_{96}$, die Archimedes noodig heeft. Zooals men ziet, verschilt deze methode aanmerkelijk van de werkelijk door Archimedes gevolgde. Het is dan ook bepaald onjuist, om, zooals H. Dörrie doet (*Triumph der Mathematik* (Breslau 1933) p. 183—183), te beweren, dat Archimedes zoo zijn benaderingen voor $\pi$ zou hebben berekend.

Hieruit volgt:

**(Omtrek van den ingeschreven regelmatigen 96-hoek, diameter)**

$$> (\overline{,\varsigma\tau\lambda\varsigma},\ \overline{,\beta\iota\zeta}\ \delta')$$

waarin $\overline{,\varsigma\tau\lambda\varsigma}$ verkregen is als product van $\overline{\text{ϙ}\varsigma}$ en $\overline{\xi\varsigma}$.

Nu bevat $\overline{,\varsigma\tau\lambda\varsigma}$ meer dan het drievoud van $\overline{,\beta\iota\zeta}\ \delta'$ met nog tien eenenzeventigste deelen daarvan. Hieruit volgt, dat de omtrek van den cirkel grooter is dan het drievoud van den diameter, vermeerderd met tien eenenzeventigste deelen daarvan.

Het laatste deel der berekening is als volgt weer te geven:

$$\frac{z_{96}}{d} > \frac{66}{2017\frac{1}{4}}$$

dus
$$\frac{96\ z_{96}}{d} > \frac{96\ .\ 66}{2017\frac{1}{4}} = \frac{6336}{2017\frac{1}{4}} > 3 + \frac{10}{71}.$$

dus a fortiori

$$\text{Omtrek van den cirkel} > 3\frac{10}{71}\ \text{diameter.}$$

2. Thans blijft nog de vraag over, hoe Archimedes in het algemeen te werk kan zijn gegaan bij de rationale benadering van vierkantswortels en hoe hij in het bijzonder de beide rationale grenzen voor $\sqrt{3}$ kan hebben gevonden, die de uitgangspunten voor de twee deelen der berekening vormden. We roeren hiermee een kring van problemen aan, die meer dan eenig ander punt uit de Grieksche wiskunde aanleiding heeft gegeven tot historisch onderzoek en mathematische reconstructie. De literatuur erover is zoo omvangrijk, dat we af moeten zien van een volledige kritische bespreking [8]); we beperken ons dus tot de uiteenzetting van enkele oplossingen der kwestie, die om hare nauwe aansluiting aan gewaarborgd Grieksche rekenwijzen in het bijzonder vertrouwen verdienen.

Als gemeenschappelijke grondslag daarvan kan een plaats in de

---

8) De belangstellende lezer vindt een kritisch overzicht van de oudere literatuur bij T. L. Heath, *Archimedes. Introduction* lxxxiv-xcix. Meer op de hoogte van den tijd zijn de besprekingen van Jos. E. Hofmann:

*a. Erklärungsversuche für Archimed's Berechnung von* $\sqrt{3}$. Archiv f. Gesch. Math. Nat. Techn. 12 (1930) 386—408.

*b. Uber die Annäherung von Quadratwurzeln bei Archimedes und Heron.* Jahresbericht D.M.V. 43 (1934) 187—210.

*Metrika* van Heroon worden beschouwd [9]), waar een benadering van den vierkantswortel uit 720 als volgt wordt bepaald: de wortel uit het dichtst bij 720 gelegen vierkant getal is 27; vorm nu het quotient van 720 door 27; dit bedraagt $26 + \frac{2}{3}$; een betere benadering van $\sqrt{720}$ dan 27 zelf is nu

$$\tfrac{1}{2}(27 + 26 + \tfrac{2}{3}) = 26 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}.$$

De aannemelijkheid van deze handelwijze springt in het oog: wanneer 27 te groot is, is het quotient 720 : 27 te klein; het is te verwachten, dat het arithmetisch gemiddelde van beide waarden een verbeterde benadering zal zijn.

Algemeen geformuleerd bestaat de methode dus hierin, dat als $\alpha_1$ een benadering van $\sqrt{d}$ is, een andere (meestal betere [10])) benadering wordt verkregen door te berekenen $\beta_1 = \frac{d}{\alpha_1}$ en nu te vormen

$$\alpha_2 = \frac{\alpha_1 + \beta_1}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Zetten we deze handelwijze voort met $\alpha_2$, dan moet daarbij bepaald worden

$$\beta_2 = \frac{d}{\alpha_2} = \frac{2\alpha_1\beta_1}{\alpha_1 + \beta_1}$$

zoodat $\beta_2$ het harmonisch gemiddelde van de oorspronkelijke waarden $\alpha_1$ en $\beta_1$ blijkt te zijn [11]).

---

[9]) *Heronis Opera* III, 18. Het handschrift der *Metrika* is eerst in 1896 teruggevonden; van de oudere, deels gecompliceerde reconstructiepogingen der Archimedische methode hebben de meeste door de ontdekking van dit eenige klassieke getuigenis veel van hare waarde verloren.

[10]) Om te onderzoeken wanneer $\alpha_2$ een betere benadering is dan $\alpha_1$, schrijven we

$$|\sqrt{d} - \alpha_2| = \frac{(\sqrt{d} - \alpha_1)^2}{2\alpha_1}$$

Een noodige en voldoende voorwaarde, dat $\alpha_2$ beter is dan $\alpha_1$, is nu

$$\frac{(\sqrt{d} - \alpha_1)^2}{2\alpha_1} < |\sqrt{d} - \alpha_1| \text{ of } |\sqrt{d} - \alpha_1| < 2\alpha_1 \text{ of } \sqrt{d} < 3\alpha_1.$$

Wanneer $\alpha_1$ een eenigszins behoorlijke benadering was, is hieraan natuurlijk wel voldaan.

[11]) De vorming van deze gemiddelden behoort, zooals uit passages van Plato en Archutas blijkt, tot de reeds vroegtijdig behandelde onderwerpen der Grieksche wiskunde. Dat zij reeds vóór Archimedes

De door Heroon toegepaste methode bestaat dus hierin, dat men, uitgaande van twee getallen, die $\sqrt{d}$ tot geometrisch gemiddelde hebben, opv. het arithmetisch en het harmonisch gemiddelde van die getallen vormt. Deze hebben dan weer $\sqrt{d}$ tot geometrisch gemiddelde, zoodat de bewerking opnieuw kan beginnen.

We merken nog op, dat de verkregen benadering $\alpha_i$ $(i \geqq 2)$ steeds aan den hoogen kant van $\sqrt{d}$ zal liggen, omdat het arithmetisch gemiddelde van twee ongelijke getallen grooter is dan het geometrisch gemiddelde.

Tot hetzelfde resultaat als de betrekking (1) leidt een andere formule, waarvan het voorkomen in de Grieksche wiskunde door verschillende bewijsplaatsen [12]) gewaarborgd is en waarvan men de toepassing zelfs heeft kunnen aantoonen in de Babylonische wiskunde van ca. 2000 v. Chr. [13]). Zij luidt in moderne schrijfwijze als volgt:

Zij $p$ een benadering van $\sqrt{d}$ aan den lagen kant, zoodat $d = p^2 + r$. Een betere benadering is dan

$$q = p + \frac{r}{2p} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

De juistheid hiervan kan zijn ingezien met behulp van den regel voor het quadrateeren van een som, dien wij door $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ algebraisch weergeven en die in de Grieksche oppervlakterekening meetkundig wordt uitgedrukt (Euclides II, 4). Quadrateeren van het tweede lid geeft nl. $d$ met verwaarloozing van het (bij gebruik van een behoorlijke benadering $p$) kleine vierkant van $\frac{r}{2p}$.

---

met benadering van vierkantswortels in verband zal zijn gebracht, is, hoewel niet direct bewijsbaar, alleszins aannemelijk. Men vindt de bedoelde passages van Plato en Archutas naast elkaar geplaatst in de in noot 25 van blz. 111 te citeeren verhandeling van O. Toeplitz.

[12]) *Stereometrica. Heronis Opera,* V. (Leipzig 1914). We vermelden als voorbeelden:

pag. 150 $\sqrt{1125} = 33 + \frac{1}{2} + \frac{1}{22}$.

pag. 152 $\sqrt{1081} = 32 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{64}$.

pag. $\sqrt{108} = 10 + \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$.

Verg. verder: P. Tannery, *L'Arithmétique des Grecs dans Héron d'Alexandrie.* Mém. Scientif. I (Parijs 1912), 204 sec.

[13]) O. Neugebauer, *Über die Approximation irrationaler Quadratwurzeln in der babylonischen Mathematik.* Archiv für Orientforschung VII (1931), pag. 90 seq.

Het is ook denkbaar, dat de vermelde regel een toepassing is geweest van de bij Heroon voorkomende. Bij de benadering $\alpha_1 = p$ van $\sqrt{d}$ behoort nl. als $\beta_1$ de waarde $p + \frac{r}{p}$; het arithmetisch gemiddelde der twee benaderingen is dan $p + \frac{r}{2p}$.

Is $d = p^2 - r$ dan vindt men op dezelfde wijze als benadering

$$\sqrt{d} \backsim p - \frac{r}{2p}$$

Ook hiervan zijn voorbeelden in de Grieksche wiskunde bekend[14]).

We zullen verder de beide aangegeven formules als één enkel rekenvoorschrift beschouwen en dit als den Babylonischen regel aanduiden.

Het blijkt nu, dat van alle benaderingen van vierkantswortels, die bij Archimedes en Heroon voorkomen, de overgroote meerderheid ongedwongen door toepassing van dezen Babylonischen regel te verklaren zijn [13]). Daarbij wordt echter de regel gewoonlijk niet in volle strengheid toegepast. Zooals nl. boven reeds bleek, kon Archimedes voor zijn berekeningen in de *Cirkelmeting* volstaan met als benadering gemengde getallen te gebruiken, waarvan het echte-breukgedeelte in de meerderheid der gevallen een noemer 2, 4 of 8 had, terwijl eenmaal 6 en eenmaal 11 als noemer optrad. Nu levert de exacte toepassing van den regel gewoonlijk veel meer gecompliceerde breuken op; Archimedes weet deze echter te ontgaan door de waarde van $\frac{d}{\alpha_1}$ (of, wat op hetzelfde neerkomt, van $\frac{r}{\alpha_1}$ wanneer $d = \alpha_1^2 + r$) op geschikte manier af te ronden, waardoor de verdere berekening sterk vereenvoudigd wordt. Dit heeft natuurlijk ten gevolge, dat de door vorming van het arithmetisch gemiddelde gevonden benaderingen niet steeds meer aan den grooten kant van $\sqrt{d}$ liggen. Zulke benaderingen zouden trouwens in het eerste deel der berekening, waar een bovenste grens voor den cirkelomtrek moet worden bepaald, niet eens bruikbaar zijn. Bij de keuze der afrondingen is hierop natuurlijk gelet; waarschijnlijk is telkens achteraf gecontroleerd, of het gestelde doel inderdaad bereikt was.

---

[14]) Heroon, *Stereometrica* (zie noot 12 van blz. 105) pag. 34: $\sqrt{63} = 8 - \frac{1}{16}$.

[15]) Hofmann, b. (noot 8 van blz. 103).

We geven enkele voorbeelden ter toelichting [16]:

In het eerste deel der propositie was te berekenen:

$$\sqrt{571^2 + 153^2} \text{ of } \sqrt{349450}$$

Neem nu $\alpha_1 = 571$, dan is $\beta_1 = \frac{d}{\alpha_1} = 571 + \frac{153^2}{571}$.

Hierin is $\frac{153^2}{571} \backsim 40$ (41 ligt dichterbij, maar 40 voert tot een geheele uitkomst); de nieuwe benadering wordt dus

$$\alpha_2 = \frac{\alpha_1 + \beta_1}{2} = 591.$$

Nu is $\beta_2 = \frac{d}{\alpha_2} = 591 + \frac{169}{591}$ waarin $\frac{169}{591} > \frac{150}{600} = \frac{1}{4}$. Archimedes neemt nu voor $\beta_2$ de waarde $591 + \frac{1}{4}$ en vindt dus als nieuwe benadering

$$\alpha_3 = 591 + \tfrac{1}{8}$$

Daar $\frac{1}{4}$. $591 < 169$, is $\alpha_3 < \sqrt{d}$.

In het tweede deel der propositie kwam voor

$$\sqrt{2911^2 + 780^2} \text{ of } \sqrt{9.082.321}$$

Uit $\alpha_1 = 2911$ volgt $\beta_1 = 2911 + \frac{780^2}{2911} \backsim 2911 + 209$ (rest 1)

Dus

$$\alpha_2 = 2911 + 104 + \tfrac{1}{2} = 3015 + \tfrac{1}{2}.$$

Wegens het geringe bedrag van de rest, 1, kan men vermoeden, dat $\alpha_2 > \sqrt{d}$ zal zijn, wat door berekening bevestigd wordt.

Men heeft nu $(3015 + \frac{1}{2})$ te deelen op 9.082.321; daarbij moet telkens zoo worden afgerond, dat het quotient iets te groot wordt, terwijl het zoo eenvoudig mogelijk moet zijn. Men vindt als quotient 3012, waardoor als benadering van den wortel als gemiddelde van $3015 + \frac{1}{2}$ en 3012 de waarde $3013 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ gevonden wordt.

3. We komen thans tot de meer bijzondere vraag, hoe Archimedes aan de beide rationale benaderingen $\frac{265}{153}$ en $\frac{1351}{780}$ voor $\sqrt{3}$ gekomen kan zijn. Het ligt voor de hand, om na te gaan, of zij

---

[16] Men vindt de berekeningen uitgevoerd bij Hofmann, **b**.

ook met behulp van den Babylonischen regel gevonden kunnen worden. Dat gelukt voor de waarde $\frac{1351}{790}$ heel gemakkelijk, als men uitgaat van $\frac{5}{3}$ als eerste benadering.

Men vindt dan opv.

$$\alpha_1 = \frac{5}{3}, \beta_1 = \frac{9}{5} \qquad \alpha_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{3} + \frac{9}{5}\right) = \frac{26}{15}$$

$$\alpha_2 = \frac{26}{15}, \beta_2 = \frac{45}{26} \qquad \alpha_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{26}{15} + \frac{45}{26}\right) = \frac{1351}{780}$$

Het uitgangspunt $\frac{5}{3}$ kan echter niet volgens deze methode gevonden worden. Men kan het zich echter bepaald denken op grond van de opmerking, dat 27, welks vierkantswortel het drievoud van $\sqrt{3}$ is, dicht bij het vierkant van 5 ligt. Uit $27 \backsim 5^2$ volgt dan

$$\sqrt{3} \backsim \frac{5}{3}.$$

Een andere mogelijkheid is, dat we hier te maken hebben met de toepassing van een nevenvorm van den Babylonischen regel [17]), waarin men voor $\sqrt{p^2 - r}$ niet de te groote waarde $p - \frac{r}{2p}$ schrijft, maar de te kleine

$$p - \frac{r}{2p - 1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Men krijgt dan

$$\sqrt{3} = \sqrt{2^2 - 1} \backsim 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3}.$$

Een direct bewijs voor het gebruik van $\frac{5}{3}$ als benadering voor $\sqrt{3}$ is weliswaar evenmin te geven als voor de bekendheid van den algemeenen regel, waaruit zij hier is afgeleid. De aanname, dat deze regel bekend is geweest, verklaart echter op zoo eenvoudige wijze tal van gewaarborgde benaderingen, dat het wel geoorloofd lijkt, hem te aanvaarden.

Men kan er in de eerste plaats de grens $\frac{265}{153}$ uit afleiden [18]),

---

[17]) F. Hultsch, *Die Näherungswerte irrationaler Quadratwurzeln bei Archimedes.* Göttinger Nachrichten 1893. 367—428.

[18]) F. Hultsch, l.c. pag. 401.

door uit te gaan van de boven gevonden benadering $\frac{26}{15}$ en nu aan te nemen, dat Archimedes (of wie vóór hem de misschien reeds veel eerder bekende grenzen heeft bepaald) heeft opgemerkt

$$26^2 = 3.15^2 + 1$$

Nu is nl.

$$\sqrt{3} = \frac{1}{15}\sqrt{26^2 - 1} \backsim \left[26 - \frac{1}{51}\right] = \frac{265}{153}$$

Vervolgens voert de gewijzigde Babylonische regel (3) op eenvoudige wijze tot een verklaring van een door Hofmann bij de analyse van benaderingen van vierkantswortels in de werken van Heroon opgemerkte rekenwijze [19]), die algebraisch als volgt luidt

$$\sqrt{x^2 - 1} \backsim x - \frac{1}{2x - 1} + \frac{1}{(2x-1)(2x+1)} \quad . \quad . \quad (4)$$

De juistheid hiervan is langs algebraischen weg als volgt in te zien: Zij als benadering bekend

$$\alpha_1 = x - \frac{1}{2x - 1}$$

dan is

$$\beta_1 = \frac{(x^2 - 1)(2x - 1)}{2x^2 - x - 1} = \frac{(x + 1)(2x - 1)}{2x + 1} = x - \frac{1}{2x + 1}$$

zoodat volgens den Babylonischen regel de volgende benadering is

$$\frac{1}{2}\left[2x - \frac{1}{2x - 1} - \frac{1}{2x + 1}\right] = x - \frac{1}{2x - 1} + \frac{1}{(2x - 1)(2x + 1)}.$$

Als gewaarborgd voorbeeld, waarin deze regel (4) toegepast kan zijn, vermelden we de bij Heroon [20]) voorkomende herleiding

$$\sqrt{216} = 14 + \frac{2}{3} + \frac{1}{33}$$

wat te verklaren is als

$$\sqrt{216} = 3\sqrt{5^2 - 1} = 3\left[5 - \frac{1}{9} + \frac{1}{9 . 11}\right] = 14 + \frac{2}{3} + \frac{1}{33}$$

Met behulp van den regel (4) blijkt nu ook de benadering $\frac{1351}{780}$ voor $\sqrt{3}$ in één stap te kunnen worden verkregen [21]). Men schrijft daartoe:

---

[19]) Hofmann, b (noot 8 van blz. 103).
[20]) *Geometrica. Heronis Opera* IV, 322.
[21]) Hofmann, b (noot 8 van blz. 103).

$$\sqrt{3} = \frac{1}{4}\sqrt{7^2 - 1} = \frac{1}{4}\left[7 - \frac{1}{13} + \frac{1}{13.15}\right] = \frac{1351}{780}.$$

Zooals men ziet, kunnen de door Archimedes gebruikte grenzen op allerlei verschillende wijzen voor den dag worden gebracht. Van de vele andere voorgestelde methoden vermelden we nog die van K. Vogel [22]), die in den Babylonischen regel

$$\sqrt{\alpha_1^2 + r} \backsim \alpha_1 + \frac{r}{2\alpha_1} = \alpha_2$$

voor $2\alpha_1$ in den noemer $\alpha_1 + \alpha_2$ zet en daardoor een nieuwe benadering

$$\alpha_2' = \alpha_1 + \frac{r}{\alpha_1 + \alpha_2}$$

verkrijgt, die voor

$$\alpha_1 = \frac{5}{3} \quad \alpha_2 = \frac{26}{15} \quad r = \frac{2}{9}$$

oplevert

$$\alpha_2' = \frac{5}{3} + \frac{\frac{2}{9}}{\frac{5}{3} + \frac{26}{15}} = \frac{265}{153}$$

Men zal wellicht opmerken, dat zulk een handelwijze toch geen bewijskracht heeft; dat is, uit historisch oogpunt beschouwd, nauwelijks een tegenwerping te noemen; juist op het gebied der rekenkunde heeft men zich heel lang (zeker tot in de 17e eeuw) tevreden gesteld met regels aan te geven en te constateeren, dat deze tot goede resultaten voeren. Het is in dit verband van belang, dat Eutokios in zijn commentaar op de *Cirkelmeting* [23]) geen andere toelichting geeft bij de passages, waarin de benaderingen van $\sqrt{3}$ worden vermeld, dan een controleberekening, waaruit blijkt, dat $1351^2$ weinig van $3.780^2$ verschilt en evenzoo $265^2$ weinig van $3.153^2$.

Als bezwaar tegen de meegedeelde reconstructies zou men verder kunnen aanvoeren, dat ze bij de onderste en de bovenste grens niet volgens eenzelfde systeem werken; dat is opnieuw geen afdoend historisch argument, want men weet niet zeker, of de

---

[22]) Kurt Vogel, *Die Näherungswerte des Archimedes für* $\sqrt{3}$. Jahresbericht D.M.V. XLI (1932), pag. 155.

[23]) *Opera* III, 234; 246.

Grieksche logistici wel een vast systeem voor het benaderen van vierkantswortels hebben bezeten. Mathematisch kan het echter als een aesthetisch bezwaar worden gevoeld; wie het deelt, zal wellicht de voorkeur geven aan een andere, door C. Müller [24]) voorgestelde en door O. Toeplitz [25]) gegeneraliseerde divinatie van den Archimedischen gedachtengang, die in algebraische symboliek als volgt is weer te geven:

Laat $a$ en $b$ twee benaderingen van $\sqrt{d}$ zijn, dan is

$$C = \frac{ab + d}{a + b} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

een nieuwe benadering, die aan den lagen of hoogen kant van $\sqrt{d}$ ligt, al naar gelang $a$ en $b$ aan verschillende kanten of aan denzelfden kant daarvan liggen. De juistheid van deze bewering is onmiddellijk in te zien op grond van de schrijfwijze

$$C = \frac{ab + d}{a + b} = \sqrt{d} + \frac{(a - \sqrt{d})(b - \sqrt{d})}{a + b}$$

Om te onderzoeken, onder welke voorwaarde $c$ een betere benadering is dan $a$, schrijft men

$$\left|\frac{c - \sqrt{d}}{a - \sqrt{d}}\right| = \frac{|b - \sqrt{d}|}{a + b}$$

Opdat nu

$$|c - \sqrt{d}| < |a - \sqrt{d}|$$

is noodig en voldoende

$$\left|\frac{b - \sqrt{d}}{a + b}\right| < 1$$

waaruit men afleidt

$$2b + a > \sqrt{d}.$$

Evenzo is $c$ dan en slechts dan een betere benadering van $b$, wanneer

$$2a + b > \sqrt{d}.$$

---

[24]) C. Müller, *Wie fand Archimedes die von ihm gegebenen Näherungswerte von* $\sqrt{3}$? Quellen und Studien z. Gesch. d. Math. Astr. u. Phys. Abt. B. II (1932) 281—285.

[25]) O. Toeplitz, *Bemerkungen zu der Arbeit von Conrad Müller „Wie fand Archimedes die von ihm gegebenen Näherungswerte von* $\sqrt{3}$?" *im gleichen Heft.* ibidem 286—290.

We krijgen nu volgens dezen regel als opvolgende benaderingen van $\sqrt{3}$:

$$\text{uit } a = 1\,,\, b = 2 \qquad c = \frac{5}{3} < \sqrt{3}$$

$$\text{uit } a = \frac{5}{3}\,,\, b = \frac{5}{3} \qquad c = \frac{26}{15} > \sqrt{3}$$

$$\text{uit } a = \frac{5}{3}\,,\, b = \frac{26}{15} \qquad c = \frac{265}{153} < \sqrt{3}$$

$$\text{uit } a = \frac{26}{15}\,,\, b = \frac{26}{15} \qquad c = \frac{1351}{780} > \sqrt{3}.$$

Men krijgt zoo met weinige en systematische stappen de beide door Archimedes gebruikte grenzen.

Past men den regel toe voor het geval, dat $a$ een benadering $\alpha$ van $\sqrt{d}$ is en stelt men $b = a$, dan vindt men

$$c = \frac{\alpha^2 + d}{2\alpha} = \frac{1}{2}\left[\alpha + \frac{d}{\alpha}\right] = \frac{1}{2}[\alpha + \beta] \text{ wanneer } \beta = \frac{d}{\alpha}.$$

Neemt men $b = \beta$ dan vindt men

$$c = \frac{2\alpha\beta}{\alpha + \beta}.$$

Men krijgt dus juist de twee gemiddelden (arithmetisch en harmonisch) van $\alpha$ en $\beta$, die bij herhaalde toepassing van den Babylonischen regel optraden.

Of hieraan, zooals Toeplitz meent, een historisch argument voor de bekendheid van den algemeenen regel (5), waarin tusschen $a$ en $b$ geen verband bestaat, te ontleenen is, lijkt twijfelachtig. Door het bestaan van den Babylonischen regel is de regel (5) alleen gewaarborgd voor de gevallen $b = a$ en $ab = d$. In de boven weergegeven toepassing ter bepaling van de grenzen voor $\sqrt{3}$ (waarvan de waarde vooral gezocht wordt in het feit, dat zij de beide grenzen in het verloop van één berekening oplevert) is echter bij de helft der gedane stappen noch het eene, noch het andere het geval.

4. We vermelden nu ten slotte

Propositie 2.

*De cirkel heeft tot het vierkant op den diameter de reden, die 11 tot 14 heeft.*